0 - Richiami di calcolo vettoriale

0-1.
Determinare l'equazione parametrica di una retta passante per due punti A e B definiti dai vettori posizione $\bar{a}$ e $\bar{b}$ nel sistema di riferimento cartesiano di origine O.

0-2.
Determinare gli angoli tra il vettore $\bar{A}$ e gli assi coordinati. Determinare il versore di $\bar{A}$.

0-3.
Calcolare l'angolo θ formato dai vettori $\bar{A} = 2\,\hat{e}_x + 2\,\hat{e}_y - \hat{e}_z$ e $\bar{B} = 6\,\hat{e}_x - 3\,\hat{e}_y + 2\,\hat{e}_z$.

0-4.
Determinare il versore perpendicolare al piano definito dai vettori $\bar{A} = 2\,\hat{e}_x - 6\,\hat{e}_y - 3\,\hat{e}_z$ e $\bar{B} = 4\,\hat{e}_x + 3\,\hat{e}_y - \hat{e}_z$.

0-5.
Scrivere l'equazione del piano perpendicolare ad $\bar{A} = 2\,\hat{e}_x + 3\,\hat{e}_y + 6\,\hat{e}_z$ e passante per l'estremità del vettore $\bar{B} = \hat{e}_x + 5\,\hat{e}_y + 3\,\hat{e}_z$.

0-6.
Trovare la distanza tra il piano determinato nell'esercizio precedente e l'origine del sistema di riferimento.

0-7.
Dimostrare che l'area del parallelogrammo di lati $\bar{A}$ e $\bar{B}$ è $|\bar{A} \times \bar{B}|$.

0-8.
Un corpo rigido ruota attorno a un asse (sul quale è posto O, origine del sistema di riferimento) con velocità angolare ω. Detto $\bar{\omega}$ il vettore di modulo ω e orientato lungo l'asse di rotazione secondo l'orientazione della vite destrorsa, mostrare che il punto generico P del corpo si muove con velocità $|\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}|$.

0-9.
Sia data una circonferenza, espressa in forma parametrica
$\bar{r}(t) = R\,cos(\omega t)\hat{e}_x + R\,sin(\omega t)\hat{e}_y$ con $t \in \mathbb{R}$.
a) Scrivere l'equazione del vettore tangente $\bar{T}$.
b) Calcolare la lunghezza dell'arco per $t \in [0, t^*]$, ovvero compreso tra $\bar{r}(0)$ e $\bar{r}(t^*)$.
c) Riscrivere $\bar{r}$ parametrizzata in s = lunghezza d'arco.

0-10.
Il vettore posizione di una particella in moto è $\bar{r} = cos(\omega t)\hat{e}_x + sin(\omega t)\hat{e}_y$, con ω costante.
a) Mostrare che la velocità $\bar{v}$ è perpendicolare a $\bar{r}$.
b) Mostrare che l'accelerazione $\bar{a}$ è diretta verso l'origine O del sistema di riferimento e ha modulo proporzionale alla distanza da O.
c) Mostrare che $\bar{r} \times \bar{v}$ è un vettore costante.

0-11.

Una particella di massa m ha posizione $\bar{r}$ rispetto all'origine O del sistema di riferimento. Sulla particella agisce una forza $\bar{F}$. Il momento della forza rispetto a O è dunque $\bar{M} = \bar{r} \times \bar{F}$. Se $\bar{H} = \bar{r} \times m\bar{v}$, con $\bar{v}$ velocità della particella, dimostrare che $\bar{M} = d\bar{H}/dt$.

0-12.

L'accelerazione di una particella è data nella forma

$\bar{r}(t) = 12\, cos(2t)\hat{e}_x - 8\, sin(2t)\hat{e}_y + 16t\, \hat{e}_z \;\; \forall t > 0.$

Dati $\bar{r}(0) = 0$, $\bar{v}(0) = 0$, determinare $\bar{r}(t)$ e $\bar{v}(t)$ $\forall t > 0$.

0-13.

La particella P di massa m ha equazione del moto $md^2\bar{r}/dt^2 = f(r)\hat{r}_1$, dove $\bar{r}$ è il vettore posizione di P rispetto all'origine O del sistema di riferimento, $\hat{r}_1$ è il versore nella direzione di $\bar{r}$ e f(r) è una funzione della distanza $\overline{PO}$.

a) Mostrare che $\bar{c} = \bar{r} \times d\bar{v}/dt$ è un vettore costante.

b) Interpretare fisicamente i casi f(r) < 0, f(r) > 0.

c) Interpretare geometricamente il risultato a).

d) Descrivere il nesso tra questi risultati e il moto dei pianeti nel sistema solare.

0-14.

Determinare il lavoro compiuto per far fare a una particella una circonferenza completa nel piano xy, con centro nell'origine e raggio 3, se la forza da esercitare ha forma

$\bar{F}(x, y, z) = (2x - y - z)\hat{e}_x - (x + y - z^2)\hat{e}_y + (3x - 2y + 4z)\, \hat{e}_z.$

0-15.

Dati $\Phi = 2xyz^2$, $\bar{F} = xy\hat{e}_x - z\hat{e}_y + x^2\hat{e}_z$ e la curva C definita tramite la parametrizzazione (x = t_2; y = 2t; z = t^3) $\forall t \in [0,1]$, calcolare gli integrali di linea forma

$\int_C \Phi\, d\bar{r}$

$\int_C \bar{F} \times d\bar{r}$

0-16.

Data la forza elementare espressa dalla formula $d\bar{F} = Id\bar{l} \times \bar{B}$, con $d\bar{l}$ elemento di cammino su di una circonferenza di raggio a e centro (x_c,0,0) e $\bar{B} = B_0 x/x_0 \hat{e}_z$, calcolare la forza complessiva sulla circonferenza.