Elementi di Fisica dei Continui - generalità

<u>Continuo</u>: mezzo materiale in cui, una volta stabilita la massima lunghezza d che si possa trattare come infinitesima, allora presa una regione di diametro d il numero di costituenti microscopici in essa contenuti è abbastanza grande da risultare statisticamente significativo. [Diametro = distanza massima tra due punti nel volume pres.]

Ne risulta che la definizione di un mezzo come continuo non è assoluta, bensì questione di <u>scala</u> e <u>confronti tra scale</u>. Ecco alcuni esempi di scala crescente.

- In solidi e liquidi le distanze interatomiche/intermolecolari sono dell'ordine di 1-10 Å, cioè 0.1-1 nm; in un volumetto cubico di spigolo 1 μm si contano dunque $> 10^9$ costituenti elementari. 1 μm è una lunghezza infinitesima?
  - * Per un nanotecnologo, che osserva la materia a scale submicrometriche, no!
  - * Per un'osservazione, per esempio, di un fluido macroscopico, come può essere un flusso sulla scala di un laboratorio, con ostacoli che vanno dalle dimensioni del metro (pilastro di un ponte) fino, al più, a sospensioni di granuli e cioè 10-100 μm, 1 μm è adesmo e la trattazione di continuo è corretta.
- In gas come l'aria, una mole (un numero di Avogadro di particelle, $\sim 10^{23}$), in condizioni normali (1 atm - 0°C) occupa ~22 L, ovvero un cubo di spigolo ~0.28 m, ovvero $\sim 10^5$ μm; un cubo di spigolo 1 μm conterrà $\sim 10^{23}/10^{15} = 10^8$ costituenti, un numero ancora statisticamente sufficiente all'approssimazione di continuo, dunque, per studiare un gas su scala di laboratorio, o anche geofisica.

  <u>Ma</u>, rimanendo sull'ambito geofisico, l'atmosfera si fa sempre più rarefatta con l'altitudine: nella parte più alta dell'atmosfera terrestre ($h > 100$ Km) la pressione (e la densità) scende di vari ordini di grandezza e la statistica è insufficiente. A una trattazione di continuo fluido va sostituita la teoria cinetica.
- Le scale si fanno estreme in ambito astrofisico. La densità media del mezzo interstellare è di 10^6 m^{-3}, dunque sulla scala di una sonda esso <u>non</u> è certo un continuo. Su scala galattica l'anno luce (10^{16} m) è una scala appropriata e 10^{-3} anni luce =

10^{7} m sono una lunghezza ossesima. Allora in un volume di diametro 10^{7} m troviamo un numero statisticamente significativo di particelle (anche di particelle cariche, che possono essere una frazione piccola del gas), e la trattazione fluidodinamica del mezzo è nuovamente possibile.

Nota: facciamo la stessa cosa nell'elettromagnetismo classico quando introduciamo le densità di carica e corrente ($\lambda, \sigma, \rho; \bar{K}, \bar{J}$) e i campi vettoriali macroscopici densità di polarizzazione e di magnetizzazione ($\bar{P}, \bar{M}$). Anche lì stiamo passando dalla materia discreta a una trattazione continua.

Studieremo in larga parte i continui detti fluidi, quei continui che non possono rimanere in equilibrio (e dunque sono messi in moto) sotto l'azione di sforzi di taglio (torneremo successivamente su questa fondamentale definizione). Essi comprendono approssimativamente liquidi e gas, mentre i solidi elastici, seppur continui, rispondono a una diversa definizione e descrizione; tuttavia esistono materiali che hanno un comportamento che sfida questa separazione netta. Lo stato di un continuo non è del tutto definito dalla dinamica, ma è necessario lo studio termodinamico del sistema; nella parte sullo studio della trasmissione del calore tratteremo largamente il fenomeno della conduzione, pertinente più ai solidi che non ai fluidi, con esempi di natura geofisica.

Come possiamo studiare un fluido? Esistono due punti di vista.

Approccio euleriano: si osserva la variazione temporale delle grandezze di interesse in un pt $\bar{x}$ fissato. Se pensiamo a un flusso, nella regione intorno a $\bar{x}$ il continuo ivi contenuto è diverso a ogni istante t.

Approccio lagrangiano: si segue una particella fluida (= un pt materiale)* nella sua evoluzione, nel suo moto. Dunque si ha che la $\bar{x}$ associata a tale masserella è una $\bar{x}(t)$.

---

* = Definiamo particella o masserella fluida una porzione di mezzo continuo (un volumetto) di dimensione lineare infinitesima. In pratica è un punto materiale.

Il pt di vista lagrangiano impone di fare attenzione alle derivate temporali (ovvero a qualsiasi operazione necessaria per lo studio della dinamica). Data $F(\bar{x},t)$ grandezza estensiva per unità di massa, considerare la sua derivata temporale seguendo la particella fluida che sta in $\bar{x}$ all'istante t significa considerare che F dipende sia esplicitamente da t sia implicitamente tramite $\bar{x}=\bar{x}(t)$, $\Rightarrow$ $F=F(\bar{x}(t),t)$.

Dunque la derivata è la derivata di funzione composta a più variabili ed è indicata con $\frac{D}{Dt}$: DERIVATA SOSTANZIALE o MATERIALE o CONVETTIVA.

Per la regola delle derivate di funzioni composte,

$$\underline{\frac{D}{Dt}F(\bar{x}(t),t)} = \frac{\partial}{\partial t}F(\bar{x}(t),t) + \sum_{i=1}^{3} \underbrace{\frac{\partial F(\bar{x},t)}{\partial x_i}}_{(\operatorname{grad} F)_i} \underbrace{\frac{dx_i(t)}{dt}}_{v_i(\bar{x},t)} = \underline{\frac{\partial F(\bar{x},t)}{\partial t} + \bar{v}(\bar{x},t)\cdot \operatorname{grad} F(\bar{x},t)}$$

Se vogliamo dimostrarlo più esplicitamente,

$$F(\bar{x}(t),t) = F(g(t))$$

con $g(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), t) = (g_1, g_2, g_3, g_4)$

$$\Rightarrow \dot{g}(t) = \frac{d}{dt}g(t) = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}, 1\right) = (v_1, v_2, v_3, 1)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}F(g(t)) = \frac{\partial F}{\partial g_1}\dot{g}_1 + \frac{\partial F}{\partial g_2}\dot{g}_2 + \frac{\partial F}{\partial g_3}\dot{g}_3 + \frac{\partial F}{\partial g_4}\dot{g}_4 =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x_1}v_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}v_2 + \frac{\partial F}{\partial x_3}v_3 + \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \bar{v}\cdot \operatorname{grad} F(\bar{x},t)$$

Questa derivata, fatta seguendo il moto delle particelle di continuo, gode delle proprietà delle derivate ordinarie; per esempio possiamo scrivere la relazione tra differenziale e derivata sostanziale, ovvero esprimere la variazione DF della grandezza F seguendo il continuo nel suo moto naturale; al primo ordine,

$$DF(\bar{x}(t),t) = F(\bar{x}(t+dt), t+dt) - F(\bar{x}(t),t) = \frac{D}{Dt}F(\bar{x}(t),t)\,dt$$

Esempio di derivata sostanziale: l'accelerazione inerziale, che si definisce (per componenti)

$$a_i = \lim_{t \to t'} \frac{1}{t'-t} \left[v_i(\bar{x}(t'), t') - v_i(\bar{x}(t), t) \right]$$

↳ pt $\bar{x}(t')$ = evoluto temporale a t' del pt $\bar{x}$ all'istante t

$$\Rightarrow a_i = \frac{D}{Dt} v_i(\bar{x}(t), t) = (\bar{v} \cdot \text{grad}) v_i + \frac{\partial v_i}{\partial t}$$

o vettorialmente

$$\bar{a}(\bar{x}(t), t) = \frac{D}{Dt} \bar{v}(\bar{x}(t), t) = \frac{\partial}{\partial t} \bar{v}(\bar{x}(t), t) + (\bar{v} \cdot \text{grad}) \bar{v}(\bar{x}(t), t)$$