Onde di gravità

Le onde di gravità sono fenomeni d'onda il cui "motore", o forza di ripristino che contrasta la perturbazione scatenante, è la gravità (forza peso). Se ne osservano esempi in cui il fenomeno è prevalentemente superficiale (sul pelo libero tra fluido e "vuoto", o all'interfaccia tra due fluidi), e si smorza in profondità (ONDE SUPERFICIALI), ma anche all'interno del fluido (ONDE INTERNE). Le discutiamo qui per fluidi <u>perfetti</u>, approfondendo poi in particolare il caso di flusso <u>potenziale</u> e <u>incomprimibile</u>. In ogni caso, il problema impone innanzitutto la discussione delle condizioni al <u>contorno</u>/all'<u>interfaccia</u> (o <u>di raccordo</u>).

- Condizioni cinematiche generali e per fluidi perfetti

Dati due fluidi immiscibili, l'interfaccia è per definizione la superficie che li separa, $\forall t$; detta la forma (in generale) implicita che definisce l'interfaccia

$F(\bar{x},t)=\phi$

è noto per definizione che $\text{grad}F$ è perpendicolare alle superfici $F=$ costante, perciò anche alla sup. $F(\bar{x},t)=\phi$ e possiamo definire il versore normale all'interfaccia nel pt $\bar{x}$ al tempo t $\hat{n}(\bar{x},t)$:

$$\hat{n}(\bar{x},t) = \left.\frac{\text{grad}F(\bar{x},t)}{|\text{grad}F(\bar{x},t)|}\right|_{F=\phi}$$

Preso un intervallo di tempo ... dt in cui il pt di interfaccia $\bar{x}$ al tempo t si sposta in $\bar{x}+d\bar{x}$ al tempo $t+dt$, e scrivendo il differenziale di F

$$dF = F(\bar{x}+d\bar{x},t+dt) - F(\bar{x},t) = \text{grad}F\cdot d\bar{x} + \frac{\partial F}{\partial t}dt$$

entrambi sono $=\phi$ perché sull'interfaccia; $\Rightarrow$ chiamata $\bar{V} \doteq \frac{d\bar{x}}{dt}$ la velocità dell'interfaccia in $\bar{x}$,

$$\bar{V}\cdot\text{grad}F + \frac{\partial F}{\partial t} = \phi$$

equazione che definisce la vel. dell'interfaccia, e in cui appare in realtà $\bar{V}\cdot\text{grad}F$, cioè la componente di $\bar{V}$ normale all'interfaccia stessa ($V_n = \bar{V}\cdot\text{grad}F/|\text{grad}F|$).

Fluidi perfetti:

detti i due fluidi (1), (2) perfetti, poiché l'interfaccia è unica, ovvero le due superfici estreme di (1) e (2) non possono "staccarsi" tra loro, la V_n di interfaccia è anche la $v_n^{(1)}$ e la $v_n^{(2)}$: le vel. normali dei due fluidi coincidono. Dunque

$$\begin{cases} \left(\bar{v}_1 \cdot \mathrm{grad}F + \frac{\partial F}{\partial t}\right)_{F=\phi} = \phi \\ \left(\bar{v}_2 \cdot \mathrm{grad}F + \frac{\partial F}{\partial t}\right)_{F=\phi} = \phi \end{cases} \quad \text{o anche} \quad \begin{cases} v_{1n} = -\frac{1}{|\mathrm{grad}F|}\left.\frac{\partial F}{\partial t}\right|_{F=\phi} \\ v_{2n} = -\frac{1}{|\mathrm{grad}F|}\left.\frac{\partial F}{\partial t}\right|_{F=\phi} \end{cases}$$

- Condizioni dinamiche generali e per fluidi perfetti / flusso potenziale incomprimibile

Quando la forma dell'interfaccia è nota $\forall t$, le condizioni cinematiche sono sufficienti, perché si ricava la V_n e $\Rightarrow$ si hanno delle **I.B.C.** (condizioni al contorno di interfaccia) perfettamente definite (per esempio se flusso potenziale, abbiamo così delle condizioni di Neumann per l'eq. di Laplace in φ).

Ma in generale la sup. di interfaccia è incognita e sono richieste ulteriori condizioni, dette dinamiche.

Fluidi perfetti:

detti i due fluidi (1), (2) perfetti, nel limite in cui la tensione superficiale è trascurabile si è già dimostrata la continuità della pressione all'interfaccia. Questa è proprio la condizione aggiuntiva richiesta:

$$p_1 = p_2 \quad \text{per} \quad F(\bar{x}, t) = \phi$$

Flusso potenziale incomprimibile

Se l'ipotesi vale per entrambi i fluidi, scriviamo l'eq. di Bernoulli generalizzata

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\mathrm{grad}\varphi|^2 + \mathcal{V} + u = f(t)$$

utilizzando un opportuno gauge ($\rightarrow f(t) = \phi$) nel caso di flusso incomprimibile ($\mathcal{V} = p/\rho$) e con potenziale esterno u = potenziale gravitazionale diretto verticalmente ($u = gz$); la condizione $p_1 = p_2$ può essere riscritta come

$$-p_1 = \rho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\rho_1|\mathrm{grad}\varphi_1|^2 + \rho_1 g z = \rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\rho_2 |\mathrm{grad}\varphi_2|^2 + \rho_2 g z = -p_2 \quad \text{per } F(\bar{x}, t) = \phi$$

Condizioni di raccordo per interfaccia esplicita

Interfaccia esplicita significa che la forma $F(\bar{r},t)=\phi$ che descrive l'interfaccia è espressa con l'equazione

$$z=\zeta(x,y,t) \quad *$$

data la gravità $\bar{g}=-g\hat{e}_z$ $(u=gz)$, che implica un equilibrio con interfaccia a $z=\phi$.

Allora $F(\bar{x},t)=z-\zeta(x,y,t)=\phi$

e le cond. cinematiche sono ottenibili con il grad F:

$$\text{grad}F=\frac{\partial F}{\partial x}\hat{e}_x+\frac{\partial F}{\partial y}\hat{e}_y+\frac{\partial F}{\partial z}\hat{e}_z=-\frac{\partial\zeta}{\partial x}\hat{e}_x-\frac{\partial\zeta}{\partial y}\hat{e}_y+\hat{e}_z$$

Per semplicità consideriamo un caso di invarianza traslazionale in y, $\Rightarrow$ interfaccia e problema tutto indipendenti da y (la soluzione cercata sarà a sua volta $f(x,z,t)$ e $v_y=\phi$ per entrambi i fluidi): $z=\zeta(x,t)$; $\bar{v}_{1,2}=\bar{v}_{1,2}(x,z,t)$; $v_{1,2\,y}=\phi$.

* Le cond. cinematiche sono perciò

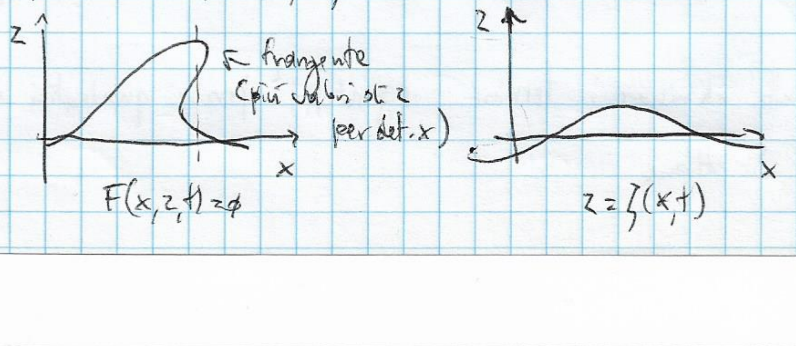
$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial F}{\partial t}+\bar{v}_1\cdot\text{grad}F\right)_{F=\phi}=\phi\\[2mm]\left(\dfrac{\partial F}{\partial t}+\bar{v}_2\cdot\text{grad}F\right)_{F=\phi}=\phi\end{cases}\longrightarrow\boxed{\begin{cases}\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}+\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}v_{1x}\Big|_{z=\zeta}-v_{1z}\Big|_{z=\zeta}=\phi\\[2mm]\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}+\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}v_{2x}\Big|_{z=\zeta}-v_{2z}\Big|_{z=\zeta}=\phi\end{cases}}$$

* La condizione dinamica è perciò

$$\boxed{\left(\rho_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}+\frac{1}{2}\rho_1|\text{grad}\varphi_1|^2\right)_{z=\zeta}+\rho_1 g\zeta=\left(\rho_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}+\frac{1}{2}\rho_2|\text{grad}\varphi_2|^2\right)_{z=\zeta}+\rho_2 g\zeta}$$

---

* = Si noti che non è sempre possibile trovare un'espressione esplicita $z=\zeta(x,y,t)$; nel disegno a sinistra la curva può essere solo espressa in forma implicita $F(x,t)=\phi$, a destra invece la curva (che rappresenta un'onda senza frangenti, strutture non lineari) è esprimibile in forma $z=\zeta(x,t)$



Linearizzazione delle condizioni all'interfaccia

Le I.B.C. descritte non sono lineari, e per ottenere soluzioni in regime lineare vanno dunque ridotte esse stesse a condizioni lineari. Per linearizzare le I.B.C., facciamo l'ipotesi di scostamento di tutte le grandezze di interesse rispetto all'equilibrio meccanico infinitesimo del primo ordine, e parimenti per le derivate spaziali e temporali di tali grandezze.

Più esplicitamente, detta $z=\phi$ la quota di equilibrio, $\Rightarrow$ ζ = quota rispetto all'equ. è ∞esima del I ordine;

detta $p_0(\bar{x})$ p di equ., $\Rightarrow$ $p'(\bar{x},t) \doteq p(\bar{x},t) - p_0(\bar{x})$ ∞esima del I ordine;

$\partial\zeta/\partial t$, $\partial\zeta/\partial x_j$, $\bar{v}$, $\partial_j v_i$ ∞esimi del I ordine;

per flussi potenziali, $\partial\varphi/\partial t$, $\partial\varphi/\partial x_j$ ∞esimi del I ordine.

- Caso di flusso potenziale incomprimibile

⊙ Condizioni cinematiche

Eliminiamo i termini quadratici nelle variabili dinamiche che danno ∞esimi del II ordine:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \cancel{\frac{\partial\zeta}{\partial x} v_{i,x}}\Big|_{z=\zeta} - v_{iz}\Big|_{z=\zeta} = \phi \qquad \text{con } i=1,2$$

quadratico

$$\Rightarrow \frac{\partial\zeta}{\partial t} - v_{iz}\Big|_{z=\zeta} = \phi$$

Valutando in $z=\zeta$ non possiamo ancora darla per una condizione lineare; se ci si pone in $z=\phi$ che errore si compie?

$$v_{iz}(x,z,t)\Big|_{z=\zeta} = v_{iz}(x,\phi,t) + \underbrace{\frac{\partial v_{iz}}{\partial z}\zeta}_{\text{prodotto di ∞esimi del I ordine = ∞esimo del II ordine!}} + \dots$$

L'errore è del II ordine e lo si può accettare $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\zeta}{\partial t} - v_{1z}\Big|_{z=\phi} = \phi \\ \dfrac{\partial\zeta}{\partial t} - v_{2z}\Big|_{z=\phi} = \phi \end{cases} \quad \text{o anche} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\zeta}{\partial t} - \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z}\Big|_{z=\phi} = \phi \\ \dfrac{\partial\zeta}{\partial t} - \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial z}\Big|_{z=\phi} = \phi \end{cases} \quad \text{ovvero } \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\Big|_{z=\phi} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\Big|_{z=\phi}$$

$$\left(v_{1z}\big|_{z=\phi} = v_{2z}\big|_{z=\phi}\right)$$

⊙ Condizione dinamica

Si possono prima di tutto eliminare i termini $|\mathrm{grad}\,\varphi_i|^2$ perché quadratici e $\Rightarrow$ ∞esimi del II ordine. Si ottiene

$$\rho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\Big|_{z=\zeta} + \rho_1 g \zeta = \rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}\Big|_{z=\zeta} + \rho_2 g \zeta$$

che non può essere valutata approssimando $z=\zeta$ con $z=\phi$, perché il termine $\rho_i g \zeta$ è infinitesimo del I ordine e del resto con l'approssimazione si annullerebbe (e non è accettabile: la gravità è proprio la forza responsabile delle onde qui trattate).

Nota: $\frac{D}{Dt}(\text{tutto}) = \phi$ perché sono rapporti incrementali di grandezze sull'interfaccia, dove l'equ. è sempre soddisfatta

Facciamo la derivata sostanziale dei due membri dell'equazione:

$$\frac{D}{Dt}\left[\rho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\Big|_{z=\zeta} + \rho_1 g \zeta\right] = \rho_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}\Big|_{z=\zeta} + \rho_1 g \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \bar{v}\cdot \text{grad}\left[\rho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\Big|_{z=\zeta} + \rho_1 g \zeta\right] =$$

$$\frac{D}{Dt}\left[\rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}\Big|_{z=\zeta} + \rho_2 g \zeta\right] = \rho_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}\Big|_{z=\zeta} + \rho_2 g \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \bar{v}\cdot \text{grad}\left[\rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}\Big|_{z=\zeta} + \rho_2 g \zeta\right]$$

la cui parte con $(\bar{v}\cdot\text{grad})$ dà ordini superiori eliminabili; risulta $\Rightarrow$

$$\rho_1 \left[\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}\Big|_{z=\zeta} + g \frac{\partial \zeta}{\partial t}\right] = \rho_2 \left[\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}\Big|_{z=\zeta} + g \frac{\partial \zeta}{\partial t}\right]$$

che si può valutare in $z=\phi$ con errore di ordine superiore senza annullare ζ:

$$\rho_1 \left[\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}\Big|_{z=\phi} + g \frac{\partial \zeta}{\partial t}\right] = \rho_2 \left[\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}\Big|_{z=\phi} + g \frac{\partial \zeta}{\partial t}\right]$$

Per giungere a una I.B.C. che coinvolga il solo potenziale $\varphi_{1,2}$ sfruttiamo le condizioni cinematiche linearizzate, per le quali $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = v_{iz}\Big|_{z=\phi} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial z}\Big|_{z=\phi}$ $\Rightarrow$ l'insieme di condizioni cinematiche e dinamiche linearizzate per 2 flussi potenziali incomprimibili di fluidi perfetti immiscibili è

$$\boxed{\text{I.B.C.}\ \begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\Big|_{z=\phi} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\Big|_{z=\phi} \\ \rho_1\left[\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}\Big|_{z=\phi} + g \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\Big|_{z=\phi}\right] = \rho_2 \left[\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}\Big|_{z=\phi} + g \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\Big|_{z=\phi}\right] \end{cases}}$$

Nota 1: per un caso del tipo acqua/aria o quasi fluido/vuoto, ovvero con $\rho_1 \gg \rho_2$, si hanno due quantità di ordine diverso e $\Rightarrow$ nella somma $\alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 = \phi$ si devono annullare separatamente i due coefficienti α_1 e α_2. Poiché in tal caso ci interessa il fluido unico o più pesante, la condizione di raccordo unica richiesta è

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\Big|_{z=\phi} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z}\Big|_{z=\phi} = \phi}$$

Inoltre rivedendo il fluido (2), per Bernoulli

$$\rho_2 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{2} |\text{grad}\, \varphi_2|^2}}_{\text{ordine superiore}} + g\zeta \right) + p_2 = \text{costante che chiamiamo } p_0$$

$\Rightarrow$ $p_2 - p_0 = \rho_2 (\dots)$ che è una quantità trascurabile, vale a dire che

$p_2 = p_0$; ma $p_2 = p_1$ $\Rightarrow$ $p_1 = p_2 = p_0$ è la <u>pressione costante all'interfaccia</u>. *

Nota 2: ricordiamo che per parlare di fluido potenziale incompressibile vanno soddisfatte determinate condizioni, viste in precedenza. Per contestualizzarle nel caso di onde di gravità;

- trattiamo onde di ampiezza $a \ll \lambda$ lunghezza d'onda, $a \ll h$ profondità del bacino d'acqua o comunque delle dimensioni spaziali in gioco; ** allora in Eulero si può trascurare il termine $\bar{v} \cdot \text{grad}\, \bar{v}$ e come visto approssimare a moto potenziale;
- trattiamo onde con velocità di propagazione $v_p \ll c$ velocità del suono;

$\Rightarrow$ τ periodo dell'onda è il tempo caratteristico,

λ lunghezza d'onda è la lunghezza caratteristica,

$\Rightarrow$ $v_p = \lambda/\tau \ll c$ implica $\tau \gg \lambda/c = l/c$ (l lungh. caratt. $= \lambda$)

la vel. del fluido $v \sim a/\tau$, con $a \ll \lambda$ $\Rightarrow$

$v \sim a/\tau \ll \lambda/\tau = v_p \ll c$ $\Rightarrow$ $v \ll c$

e sono soddisfatte le due condizioni di incompressibilità $\begin{cases} v \ll c \\ \tau \gg l/c \end{cases}$

---

* = dall'annullamento della parentesi per il fluido (1), $\left.\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\right|_{z=\phi} + g\zeta = \phi$ si può ottenere

$\zeta = -\frac{1}{g} \left.\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|_{z=\phi}$ ovvero il profilo dell'onda

---

** = del resto abbiamo richiesto piccoli scostamenti dall'equilibrio per linearizzare le B.C. e ottenere una soluzione in regime lineare

Onde di gravità in bacino di profondità infinita

Nell'ipotesi di flusso potenziale incomprimibile invariante in y, per un fluido sovrastato da aria (fluido di ρ trascurabile - idealmente un vuoto), si deve risolvere l'eq. di Laplace con la condizione all'interfaccia:

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi(x,z,t) = \phi \\ \left.\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right|_{z=\phi} + g \left.\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right|_{z=\phi} = \phi \end{cases}$$

dove $z=\phi$ è la superficie di equilibrio

Cerchiamo soluzioni di tipo onda monocromatica propagante lungo x, con funzione di prova $\varphi(x,z,t) = \cos(kx-\omega t)\, f(z)$

dove ω è la pulsazione (frequenza angolare) e k il numero d'onda ($\lambda = 2\pi/k$).

La soluzione ci deve permettere di stabilire una RELAZIONE DI DISPERSIONE, ovvero un legame tra ω e k (ovvero λ). Sostituendo la f di prova in Laplace

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -k^2 \cos(kx-\omega t) f(z) + \cos(kx-\omega t) \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} = \phi$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - k^2 f(z) = \phi$$ da: soluzione generale

$$f(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz}$$ ma $B=\phi$ altrimenti $f(z)$ diverge a grande profondità

$$\Rightarrow f(z) = Ae^{kz} \qquad \Rightarrow \varphi(x,z,t) = A\cos(kx-\omega t)e^{kz}$$

Imponendo la I.B.C. ovvero inserendovi la φ trovata

$$\left.\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right|_{z=\phi} = -A\omega^2 \cos(kz-\omega t)\, \underbrace{\cancel{e^{kz}}}_{1} = -g\left.\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right|_{z=\phi} = -gAk\cos(kx-\omega t)\underbrace{\cancel{e^{kz}}}_{1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega^2 = kg}$$ relazione di dispersione (dispersione normale, si noti)

Resta la costante A: questa sarà determinata da una qualche condizione iniziale.

La velocità del fluido è $\vec{v} = \text{grad}\,\varphi \Rightarrow$

$$v_x = \partial\varphi/\partial x = -Ake^{kz}\sin(kx-\omega t)$$

$$v_z = \partial\varphi/\partial z = Ake^{kz}\cos(kx-\omega t)$$

e si vede che in ~~un~~ pt (x,z) fissato il vettore $\vec{v}$ ruota ~~con~~ modulo costante in senso orario, nel piano xz.

Si può determinare la traiettoria di un elemento fluido se consideriamo che (x, z) siano le sue coordinate e la sua posizione di equilibrio sia (x_0, z_0). Approssimando nell'espressione di v_x, v_z la posizione (x, z) con (x_0, z_0) per piccoli spostamenti, si integra nel tempo ottenendo

$$x - x_0 = -\frac{Ak}{\omega} e^{kz_0} \cos(kx_0 - \omega t)$$

$$z - z_0 = -\frac{Ak}{\omega} e^{kz_0} \sin(kx_0 - \omega t)$$

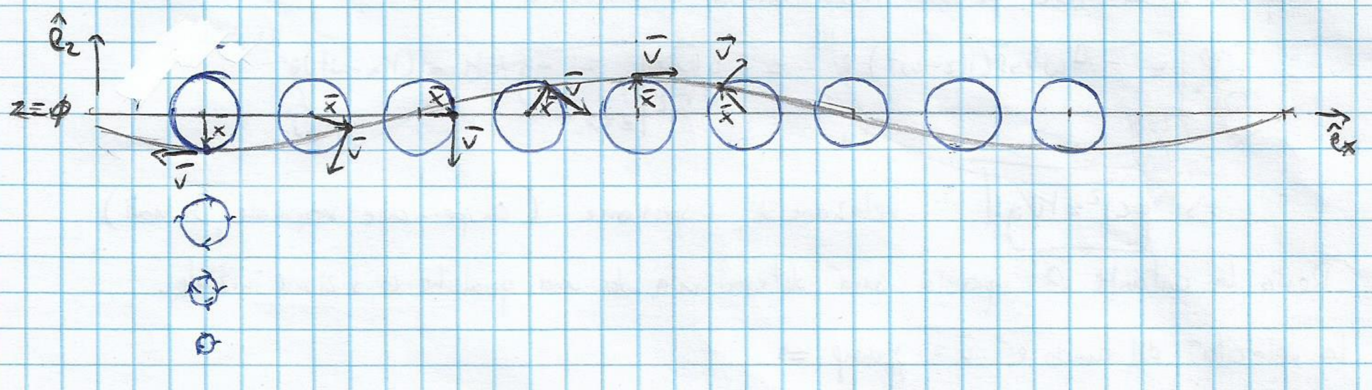
che sono nuovamente circonferenze intorno al pt di equilibrio (x_0, z_0) in senso orario.
Si noti che con l'aumentare della profondità le circonferenze si rimpiccioliscono esponenzialmente (cfr disegno).

La velocità di propagazione dell'onda (velocità di gruppo v_g) è $v_g = d\omega/dk$
e dalla relazione di dispersione $\omega = \sqrt{kg}$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$; mentre la velocità di fase $v_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$

Il profilo dell'onda si ottiene da $\zeta = -\frac{1}{g}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\Big|_{z=\phi}$:

$$\zeta(x,t) = -\frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial t}\left[A\cos(kx - \omega t)e^{kz}\right]\Big|_{z=\phi} = -\frac{1}{g}A\omega \sin(kx - \omega t)$$ (cfr. disegno)



Onde di gravità in un bacino di profondità finita

Abbiamo sempre un fluido perfetto in moto potenziale incomprimibile, invariante in direzione y e sovrastato da vuoto/aria ($\rho_{ap} << \rho$ del fluido) sopra un'interfaccia di equilibrio per $z=\phi$. Questa volta però il bacino ha profondità h, ovvero il fondo è a $z=-h$. Consideriamo dunque che l'ampiezza d'onda sia $a << h$ oltre che $a << \lambda$, e aggiungiamo una B.C. sul fondo, cioè $v_z(z=-h)$ nulla perché non ci può essere penetrazione. Il problema completo è infine dato dal set di equazioni

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi = \phi \\ \left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=-h} = \phi \qquad (\text{cioè } v_z|_{z=-h} = \phi) \\ \left.\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right|_{z=\phi} + g\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=\phi} = \phi \end{cases}$$

Ipotizziamo nuovamente una soluzione nella forma di onda monocromatica propagante lungo x con frequenza angolare ω e determiniamo la soluzione effettiva con le B.C., nonché la relazione di dispersione.

Sol. test: $\varphi(x,z,t) = \cos(kx-\omega t)\, f(z)$; inserita in Laplace dà

$$\nabla^2\varphi = -k^2\cos(kx-\omega t) f(z) + \cos(kx-\omega t)\, \partial^2 f(z)/\partial z^2 = \phi$$

ovvero $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} - k^2 f(z) = \phi$ con soluzione generale

$$f(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz} \implies \varphi(x,z,t) = (Ae^{kz}+Be^{-kz})\cos(kx-\omega t)$$

Imponiamo la condizione sul fondo:

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=-h} = (Ak e^{-kh} - Bk e^{kh})\cos(kx-\omega t) = \phi \implies Ae^{-kh} - Be^{kh} = \phi$$

Imponiamo la I.B.C. in $z=\phi$:

$$-\omega^2(Ae^{kz}+Be^{-kz})\Big|_{z=\phi}\cos(kx-\omega t) + gk(Ae^{kz} - Be^{-kz})\Big|_{z=\phi}\cos(kx-\omega t) = \phi$$

$$\implies -\omega^2(A+B) + gk(A-B) = \phi \quad \text{ovvero} \quad A(kg-\omega^2) - B(kg+\omega^2) = \phi$$

Il set delle condizioni B.C. + I.B.C. fornisce un sistema nelle incognite A e B, costanti del problema:

$$\begin{cases} e^{-kh}A - e^{kh}B = 0 \\ (kg-\omega^2)A - (kg+\omega^2)B = 0 \end{cases}$$ ovvero sistema lineare $\underline{\underline{C}}\bar{X} = 0$

con matrice dei coefficienti $\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} e^{-kh} & -e^{kh} \\ kg-\omega^2 & -(kg+\omega^2) \end{pmatrix}$

e vettore $\bar{X} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$

Escludendo la soluzione banale $\bar{X} = \bar{0}$ $(A=B=0)$, si ha soluzione solo con $\boxed{\det \underline{\underline{C}} = 0}$; questo significa in verità un numero infinito di soluzioni, con una costante, per es. B, determinata da A che invece è arbitraria (e si fissa avendo un qualche altro vincolo: una condizione iniziale). [NOTA: analogo al problema agli autovalori $(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{1}})\bar{X} = 0$!]

$$\det \underline{\underline{C}} = -e^{-kh}(kg+\omega^2) + e^{kh}(kg-\omega^2) = 0$$

$$\Rightarrow -\omega^2(e^{-kh}+e^{kh}) + kg(e^{kh}-e^{-kh}) = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 = kg\,\frac{e^{kh}-e^{-kh}}{e^{kh}+e^{-kh}} = kg\tanh(kh)$$

Rel. di dispersione: $\boxed{\omega^2 = kg\tanh(kh)}$; $v_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g\tanh(kh)}{k}}$

Poiché appunto $\exists\ \infty$ soluzioni e B si può dare in relazione ad A, da

$Ae^{-kh} - Be^{kh} = 0 \longrightarrow B = Ae^{-2kh}$

Stabiliamo per esempio $A = e^{kh}\frac{C}{2}$ si ha $B = e^{-kh}\frac{C}{2}$

$$\Rightarrow f(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz} = \frac{C}{2}e^{k(z+h)} + \frac{C}{2}e^{-k(z+h)} = C\cosh[k(z+h)]$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(x,z,t) = C\cosh[k(z+h)]\cos(kx-\omega t)}$$

Il profilo dell'onda è $\zeta(x,t) = -\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{z=0} = -\frac{C\omega}{g}\cosh(kh)\sin(kx-\omega t)$

La velocità di gruppo è $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}\left[(kg\tanh(kh))^{\frac{1}{2}}\right] =$

$$= \frac{1}{2}(gk\tanh(kh))^{-\frac{1}{2}}\left[g\tanh(kh) + gkh\cdot\frac{1}{\cosh^2(kh)}\right] \Rightarrow$$

$$v_g = \frac{1}{2}\left(\frac{g}{k\tanh(kh)}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\tanh(kh) + \frac{kh}{\cosh^2(kh)}\right] = \dots = \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\omega}{k}}_{\to v_f}\left[1+\frac{2kh}{\sinh(2kh)}\right] \; *$$

⊙ Per $kh \gg 1$, ovvero $\lambda \ll h$ (onde "corte" rispetto alla profondità del bacino)

$$\lim_{kh\to+\infty} \tanh(kh) \simeq \frac{e^{kh}}{e^{kh}} = 1$$

$$\lim_{kh\to+\infty} \cosh(kh) \simeq \frac{e^{kh}}{2} \Rightarrow \lim_{kh\to+\infty} \frac{kh}{\cosh^2(kh)} \simeq \frac{kh}{\frac{1}{4}e^{2kh}} = \emptyset$$

$$\Rightarrow \boxed{v_g \simeq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}}}$$ (come per profondità ∞, appunto) ; $v_f = \sqrt{\frac{g}{k}\tanh(kh)} = \sqrt{\frac{g}{k}}$

⊙ Per $kh \ll 1$, ovvero $\lambda \gg h$ (onde lunghe)

$$\lim_{kh\to\emptyset} \tanh(kh) = \emptyset \quad ; \quad \lim_{kh\to\emptyset} \cosh(kh) = 1$$

ma sviluppando $\tanh(kh) = kh - (kh)^3/3 + \dots \simeq kh$

$$\cosh(kh) = 1 + \frac{(kh)^2}{2} + \frac{(kh)^4}{4!} + \frac{(kh)^6}{6!} + \dots \simeq 1$$

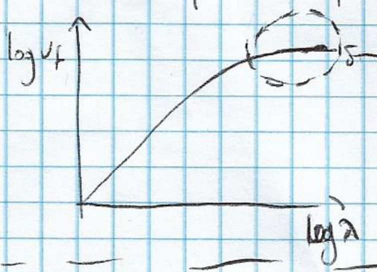
$$\Rightarrow v_g \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{g}{k\cdot kh}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot [kh + kh] = \left(\frac{g k^2 h^2}{k^2 h}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{gh}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_g = \sqrt{gh}}$$

e la $v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{k}\sqrt{kg\tanh(kh)} \simeq \frac{1}{k}\sqrt{kg\cdot kh} = \sqrt{gh}$

Si noti che qui la relazione di dispersione diventa banale (velocità indipendente dalla lunghezza d'onda).

Nel complesso si può considerare un grafico $v_f(\lambda)$ come disegnato:



↳ satura a grandi λ (piccoli k), qui relazione banale;
per λ intermedie e lunghe v_f è funzione crescente anche di h profondità, per λ piccole invece no.

$* =$

$$v_g = \frac{1}{2}\left(\frac{g}{k\tanh(kh)}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\tanh(kh) + \frac{kh}{\cosh^2(kh)}\right] = \frac{1}{2}\frac{[gk\tanh(kh)]^{\frac{1}{2}}}{k\tanh(kh)}(\dots) = \frac{1}{2}\frac{\omega}{k}\left(1+\frac{kh}{\sinh(kh)\cosh(kh)}\right) = \frac{1}{2}\frac{\omega}{k}\left[1+\frac{2kh}{\sinh(2kh)}\right]$$

Anche in questo caso vediamo com'è la traiettoria di un elemento fluido.

Da $\varphi(x,z,t) = C\cosh[k(z+h)]\cos(kx-\omega t)$ si ha

$$v_x = \partial_x\varphi = -kC\cosh[k(z+h)]\sin(kx-\omega t)$$

$$v_z = \partial_z\varphi = kC\sinh[k(z+h)]\cos(kx-\omega t)$$

dunque il vettore $\bar{v}$ ruota in senso orario, la sua ampiezza v varia durante la rotazione; se scriviamo

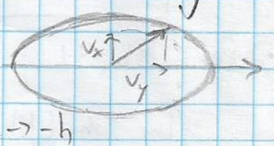
$$\frac{v_x^2}{(kC)^2\cosh^2[k(z+h)]} + \frac{v_z^2}{(kC)^2\sinh^2[k(z+h)]} = \sin^2(kx-\omega t) + \cos^2(kx-\omega t)^2 = 1$$

abbiamo l'equazione di un ellisse di semiassi

$a = kC\cosh[k(z+h)]$

con $a > b$ $\forall z \in [-h, \phi]$ e $b \to \phi$ per $z \to -h$

$b = kC\sinh(k(z+h))$



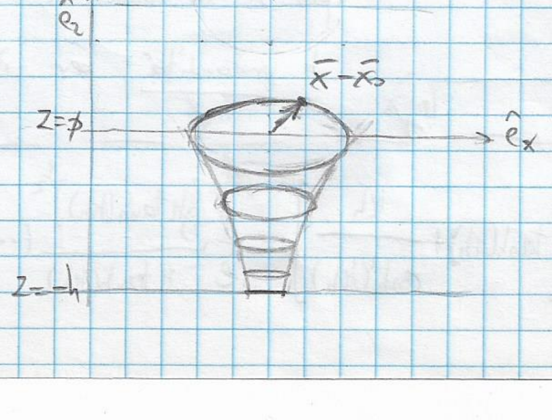
Quindi il vettore velocità esegue un ellisse sempre più piccolo e più schiacciato verticalmente via via che si scende verso il fondo (dove ci sarà soltanto v_x, mentre $v_z = \phi$ da b.c.; notare che per bacino infinitamente profondo, h molto grande, cosh ~ sinh ~ exp e $a \approx b$, ovvero ellisse → circonferenza).

Di nuovo per la traiettoria integriamo le velocità approssimando (x, z) con (x_0, y_0) posizione di equilibrio e dunque

$$x - x_0 = -\frac{kC}{\omega}\cosh[k(h+z_0)]\cos(kx_0-\omega t)$$

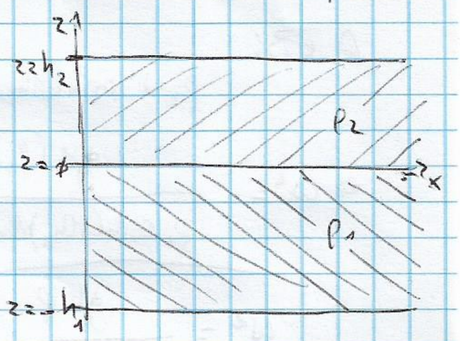
$$z - z_0 = -\frac{kC}{\omega}\sinh[k(h+z_0)]\sin(kx_0-\omega t)$$

e come per (v_x, v_z) lo spostamento $(x-x_0, z-z_0)$ dell'elemento fluido dalla posizione di equilibrio descrive un ellisse sempre più piccolo e schiacciato andando verso il fondo (ma $x-x_0$ non si annulla, mentre $z-z_0$ sì).



Onde di gravità tra due fluidi limitati in altezza

Qui i fluidi perfetti, in moto potenziale incomprimibile, invarianti in y sono due; il fluido sottostante ① è inferiormente limitato da un piano solido in $z=-h_1$, mentre il fluido sovrastante ② è superiormente limitato da un piano solido in $z=+h_2$. La superficie di separazione all'equilibrio è $z=\phi$. Il set di equazioni di B.C. + I.B.C. da accoppiare a Laplace è



$$\begin{cases} v_{1z}(-h_1) = \left.\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right|_{-h_1} = \phi \\ v_{2z}(h_2) = \left.\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right|_{h_2} = \phi \\ v_{1z}(\phi) = v_{2z}(\phi) = v_z \iff \left.\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right|_{\phi} = \left.\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right|_{\phi} \\ \rho_1 \left.\dfrac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}\right|_{\phi} + \rho_1 g \underbrace{\left.\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right|_{\phi}} = \rho_2 \left.\dfrac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}\right|_{\phi} + \rho_2 g \underbrace{\left.\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right|_{\phi}} \end{cases}$$

uguali a $v_z(\phi) = \left.\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right|_{\phi}$ (oppure $\left.\partial \varphi_2/\partial z\right|_{\phi}$)

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right|_{\phi} = \frac{1}{g(\rho_1-\rho_2)}\left(\rho_2 \left.\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}\right|_{\phi} - \rho_1 \left.\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}\right|_{\phi}\right)$$

Sul modello dell'esempio a fluido singolo, le soluzioni da attendersi si intuiscono essere *

$$\varphi_1(x,z,t) = A\cosh[k(z+h_1)]\cos(kx-\omega t)$$
$$\varphi_2(x,z,t) = B\cosh[k(z-h_2)]\cos(kx-\omega t)$$

Imponendo la continuità di v_z all'interfaccia,

$$Ak\sinh(kh_1)\cos(kx-\omega t) = Bk\sinh(-kh_2)\cos(kx-\omega t) = -Bk\sinh(kh_2)\cos(kx-\omega t)$$
$$\Rightarrow \underline{A\sinh(kh_1) + B\sinh(kh_2) = \phi}$$

Imponendo la condizione dinamica

$$g(\rho_1-\rho_2)Ak\sinh(kh_1)\cancel{\cos(kx-\omega t)} = -\rho_2\omega^2 B\overbrace{\cosh(-kh_2)}^{=\cosh(kh_2)}\cancel{\cos(kx-\omega t)} + \rho_1\omega^2 A\cosh(kh_1)\cancel{\cos(kx-\omega t)} \to$$

---

* = in altre parole stiamo già sfruttando le B.C. sulle pareti a $z=-h_1$, $z=h_2$

insieme alla condizione precedente si ha il sistema

$$\begin{cases} \sinh(kh_1)A + \sinh(kh_2)B = \emptyset \\ [gk(\rho_1-\rho_2)\sinh(kh_1) - \rho_1\omega^2\cosh(kh_1)]A + \rho_2\omega^2\cosh(kh_2)B = \emptyset \end{cases}$$

che di nuovo ha soluzioni non banali se si annulla il determinante della matrice dei coefficienti di A e B:

$$\rho_2\omega^2\sinh(kh_1)\cosh(kh_2) - gk(\rho_1-\rho_2)\sinh(kh_1)\sinh(kh_2) + \rho_1\omega^2\cosh(kh_1)\sinh(kh_2) = \emptyset$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{gk(\rho_1-\rho_2)\sinh(kh_1)\sinh(kh_2)}{\rho_1\cosh(kh_1)\sinh(kh_2) + \rho_2\sinh(kh_1)\cosh(kh_2)}$$ e dividendo sopra e sotto per $\sinh(kh_1)\sinh(kh_2)$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{gk(\rho_1-\rho_2)}{\rho_1\coth(kh_1) + \rho_2\coth(kh_2)}}$$

⊙ Se $kh_1 \gg 1$, $kh_2 \gg 1$ (entrambi fluidi profondi rispetto a λ)

$$\coth(x) = \cosh(x)/\sinh(x) = 1/\tanh(x) \underset{x\to+\infty}{\simeq} 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega^2 = gk\,(\rho_1-\rho_2)/(\rho_1+\rho_2)}\,^{*}$$

⊙ $kh_1 \ll 1$, $kh_2 \ll 1$ (onde lunghe, fluidi poco profondi)

$$\coth(x) = 1/\tanh(x) \underset{x\to\emptyset}{\simeq} \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega^2 \simeq \frac{gk(\rho_1-\rho_2)}{\rho_1/kh_1 + \rho_2/kh_2} = gk^2\,\frac{(\rho_1-\rho_2)h_1h_2}{\rho_1h_2+\rho_2h_1}}$$ (relazione banale)

$*$ = si osservi che per ω reale si deve avere $\rho_1 > \rho_2$ (del resto è da attendersi instabilità se il fluido superiore è più pesante)