Trasporto di energia in onde di gravità

Consideriamo un'onda monocromatica in un fluido ideale in moto potenziale incomprimibile con superficie superiore di equilibrio ($z=\phi$) sovrastata dal moto. L'onda si propaga lungo l'asse x e tutto il sistema è y-invariante. Sappiamo già che in questo caso

$$\varphi(x,z,t) = A\cosh[K(z+h)]\cos(Kx-\omega t)$$

$$\zeta(x,t) = -\frac{1}{g}\omega A\cosh(Kh)\sin(Kx-\omega t)$$

Prendiamo una superficie piana, attraverso cui calcoleremo il flusso, con normale lungo x, larghezza L in direzione y e altezza in z da $z=-h$ (fondo) a $z=\zeta$ (massima quota del fluido); indichiamo tale superficie con $S(\zeta)$. Il flusso di energia si è visto precedentemente, e la densità di flusso di energia si era trovato essere $\rho(\varepsilon_m+w)\bar{v}$, che nel caso presente risulta

$\rho\left(\frac{1}{2}v^2+gz+p/\rho+\varepsilon\right)\bar{v}$ e trascurando ε (conservata in flusso incomprimibile), il flusso totale attraverso $S(\zeta)$ è

$$Q^E(S) = \int_S \rho\left(\frac{1}{2}v^2+gz+p/\rho\right)\bar{v}\cdot d\bar{S} = \rho\int_S\left(\frac{1}{2}v^2+gz+p/\rho\right)v_x\,dy\,dz$$

Sfruttando il teorema di Bernoulli generalizzato, imposto tra z qualsiasi e la superficie in $z=\zeta$,

$$\frac{1}{2}v^2+\frac{p}{\rho}+gz+\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{1}{2}v^2(\zeta)+\frac{p_0}{\rho}+g\zeta+\frac{\partial\varphi(\zeta)}{\partial t}$$

La pressione sul pelo libero è una costante p_0 che si può dire nulla (trascurabile per fluido sovrastante molto meno denso); i termini di velocità sono quadratici, e dunque trascurabili in un'approssimazione lineare; infine le condizioni di raccordo per il fluido singolo danno

$$g\zeta(x,t)+\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,\phi,t)=\phi \qquad \text{che si può quindi eliminare, ottenendo}$$

$$\frac{1}{2}v^2+\frac{p}{\rho}+gz = -\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

$$\Rightarrow Q^E(S) = -\int_y^{y+L}\int_{z=-h}^{z=\zeta}\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}v_x\,dy\,dz = -\rho L\int_{z=-h}^{z=\zeta}\frac{\partial\varphi}{\partial t}v_x\,dz = -\rho L\int_{-h}^{\zeta}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dz$$

Si scompone l'integrale in due parti, tra $[-h,\phi]$ e tra $[\phi,\zeta]$; la seconda parte, a meno di termini di ordine superiore, si può approssimare usando il valore dell'integranda in $z=\phi$:

$$Q^E(S) = -\rho L \int_{-h}^{\phi} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dz \; - \; \rho L \frac{\partial \varphi(x,\phi,t)}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,\phi,t)\, \zeta(x,t)$$

Il secondo termine è del terzo ordine nelle variabili e si può trascurare rispetto al primo, che è del secondo *. Mediamo su di un periodo T:

$$\langle Q^E(S) \rangle = -\rho L \, \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{z=-h}^{z=\phi} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dz\, dt$$

Usando l'espressione di φ, $\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \omega A \cosh[k(z+h)]\sin(kx-\omega t) \cdot (-k) A \cosh[k(z+h)]\sin(kx-\omega t) =$

$$= -k\omega A^2 \cosh^2[k(z+h)] \sin^2(kx-\omega t)$$

e poiché $\sin^2$ ha media $\frac{1}{2}$ sul periodo

$$\langle Q^E(S) \rangle = \frac{1}{2}\rho L k \omega A^2 \int_{-h}^{\phi} \cosh^2[k(z+h)]\, dz \overset{**}{=} \frac{1}{2}\rho L k \omega A^2 \left[\frac{1}{4k}\sinh(2k(z+h)) + \frac{z+h}{2} \right]_{-h}^{\phi} =$$

$$= \frac{1}{8}\rho L \omega A^2 \left[2kh + \sinh(2kh) \right]$$

Determiniamo ora l'energia meccanica media (ovvero mediata sul periodo) contenuta in una regione $R(\zeta)$ che è a monte di $S(\zeta)$ lungo la direzione e verso di x, lunga in x quanto una lunghezza d'onda λ. Formalmente i pt $\in R(\lambda)$ sono i pt (x,y,z) tali che

$$R(\zeta) \begin{cases} x_0 < x < x_0 + \lambda \\ y_0 < y < y_0 + L \\ -h < z < \zeta(x,t) \end{cases}$$

Il parallelepipedo ottenuto considerando solo $z \in [-h, \phi]$ è la regione detta $R(\phi)$, racchiusa nella superficie $S_R(\phi)$ la cui parte superiore (pt $(x,y,z=\phi)$) è detta $A(\phi)$.

Scriviamo l'energia meccanica (che è definita a meno di una costante), sottraendole l'energia del fluido in stato di quiete, per la regione $R(\zeta)$:

$*$ = è peraltro prodotto di tre funzioni sinusoidali e ha media temporale nulla sul periodo

$**$ = $\int \cosh^2(\alpha x) = \frac{1}{4\alpha}\sinh(2\alpha x) + \frac{x}{2} \,(+C)$

$$E_m(R(\zeta)) = \int_{R(\zeta)} \rho\left(\frac{1}{2}v^2 + gz\right) d^3x - \int_{R(\phi)} \rho g z \, d^3x$$

Per il primo termine, la parte di regione $R(\zeta)$ superiore a $z=\phi$ dà contributo che a meno di o-esimi di ordine superiore si può approssimare sostituendo all'integrale in z il valore dell'integrando in $z=\phi$ (e $\Rightarrow$ integrando in x e y sulla superficie $A(\phi)$) moltiplicato per l'altezza $\zeta(x,t)$; si sottrae anche il contributo di $\rho g z$ sulla regione $R(\phi)$ che è lo stesso nei due termini;

$$\Rightarrow E_m(R(\zeta)) = \int_{R(\phi)} \rho \frac{1}{2} v^2 d^3x + \underbrace{\int_{A(\phi)} \rho \frac{1}{2} v^2 \zeta(x,t)\, dx dy}_{\text{termine trascurabile perché di ordine superiore}^*} + \int_{A(\phi)} \rho \underset{\uparrow \text{ di nuovo } = \zeta(x,t)}{g z} \cdot \zeta(x,t)\, dx dy$$

$$\Rightarrow E_m(R(\lambda)) = \frac{1}{2}\rho \int_{R(\phi)} v^2 d^3x + \frac{1}{2}\rho g \int_{A(\phi)} \zeta^2(x,t)\, dx dy$$

$v^2 = |\text{grad}\,\varphi|^2$; si osservi che $\text{div}(\varphi\, \text{grad}\varphi) = \text{grad}\varphi \cdot \text{grad}\varphi + \varphi\, \text{div}(\text{grad}\varphi) =$

$$= |\text{grad}\,\varphi|^2 + \varphi \underbrace{\nabla^2\varphi}_{=\phi} = |\text{grad}\,\varphi|^2 = v^2$$

$$\Rightarrow E_m(R_\lambda(\lambda)) = \frac{1}{2}\rho \int_{R(\phi)} \text{div}(\varphi\, \text{grad}\varphi)\, d^3x + \frac{1}{2}\rho g \int_{A(\phi)} \zeta^2 dx dy = \text{ col teorema della divergenza}$$

$$= \frac{1}{2}\rho \int_{S_R(\phi)} \varphi\, \text{grad}\varphi \cdot \hat{n}\, da + \frac{1}{2}\rho g \int_{A(\phi)} \zeta^2 dx dy$$

Del primo integrale (di flusso) si annullano varie parti dove $\text{grad}\,\varphi = \bar{v}$ deve avere comp. normale alla superficie <u>nulla</u> oppure si ha flusso netto nullo; infatti

- sul fondo, in $z=-h$, $v_z = \text{grad}\varphi \cdot (-\hat{n}) = \phi$;
- lungo y si ha invarianza, $\Rightarrow v_y =$ costante e sulle due pareti di $R(\phi)$ in $y=y_0$, $y=y_0+L$ il flusso entrante è uguale a quello uscente;
- per periodicità, il flusso entrante attraverso la superficie in $x=x_0$ e quello uscente attraverso $x=x_0+\lambda$ sono di nuovo uguali e opposti;

$*$ = nonché di nuovo termine a media temporale nulla resta perciò solo il flusso in direzione z attraverso $A(\phi)$:

$$E_m(R(\zeta)) = \frac{1}{2}\rho \int_{A(\phi)} \varphi(x,\phi,t)\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=\phi} dx\,dy + \frac{1}{2}\rho g \int_{A(\phi)} \zeta^2(x,t)\,dx\,dy =$$

sapendo che $\zeta = -\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{z=\phi}$

$$= \frac{1}{2}\rho \int_{A(\phi)} \left[\varphi(x,\phi,t)\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=\phi} + \frac{1}{g}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2\Big|_{z=\phi}\right] dx\,dy$$

Calcoliamo le medie temporali dei due termini esplicitando φ e le sue derivate.

$\varphi(x,z,t) = A\cosh(K(z+h))\cos(Kx-\omega t) \quad \leadsto \quad \varphi(x,\phi,t) = A\cosh(Kh)\cos(Kx-\omega t)$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=\phi} = AK\sinh(Kh)\cos(Kx-\omega t)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{z=\phi} = A\omega\cosh(Kh)\sin(Kx-\omega t)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T}\int_T \varphi(x,\phi,t)\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=\phi} dt = \frac{1}{T}\int_T A^2K\underbrace{\sinh(Kh)\cosh(Kh)}_{=\frac{1}{2}\sinh(2Kh)}\cos^2(Kx-\omega t)\,dt = \frac{1}{4}A^2K\sinh(2Kh)$$

e

$$\frac{1}{T}\int_T \frac{1}{g}A^2\omega^2\cosh^2(Kh)\sin^2(Kx-\omega t)\,dt = \frac{1}{2g}A^2\omega^2\cosh^2(Kh) = \frac{1}{2}A^2K\sinh(Kh)\cosh(Kh) = \frac{1}{4}A^2K\sinh(2Kh)$$

dalla rel. di dispersione $\omega^2 = gK\tanh(Kh)$

Si noti che: due termini sono uguali, infatti la media temporale di en. cinetica e di en. potenziale, per piccole oscillazioni, è la stessa.

$$\Rightarrow \langle E_m(R(\lambda))\rangle = \frac{1}{2}\rho\int_{A(\phi)} \frac{1}{2}A^2K\sinh(2Kh)\,dx\,dy = \frac{1}{4}\rho A^2K\sinh(2Kh)\cdot\lambda\cdot L$$

$\lambda = 2\pi/K$

cioè $\langle E_m(R(\lambda))\rangle = \frac{1}{2}\pi\rho L A^2\sinh(2Kh)$

In generale si può dire che nel trasporto di energia il flusso sarà dato dalla densità di energia per unità di volume ρ_{en} moltiplicata per la velocità v_p del flusso e l'area Σ della sezione S attraverso cui si calcola il flusso:

$$\langle Q^E(S)\rangle = \rho_{en}\Sigma v_p = \rho_{en}\frac{\overset{\text{volume}}{\Sigma\lambda}}{\lambda} v_p = \frac{\langle E_m(R(\lambda))\rangle}{\lambda} v_p$$

$$\Rightarrow v_p = \frac{\lambda\langle Q^E(S)\rangle}{\langle E_m(R(\lambda))\rangle} = \lambda\,\frac{1}{8}\rho L\omega A^2\left[2kh + \sinh(2kh)\right] \Big/ \frac{1}{2}\pi\rho L A^2\sinh(2kh) =$$

$$= \lambda\frac{\omega}{4\pi}\left[1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)}\right] = \frac{\omega}{2k}\left[1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)}\right] = v_g$$

Si scopre dunque che l'energia viene propagata da un'onda non alla velocità di fase, bensì a quella di gruppo (anche nel caso monocromatico); per le onde materiali il vero contenuto fisico di v_g è proprio quello della velocità di trasporto medio dell'energia (ancor più che quello di velocità di traslazione del pacchetto d'onda, soggetto comunque a progressiva deformazione nel mezzo dispersivo).

Appendice – Velocità di fase e di gruppo (memento minimo)

Un'onda monocromatica di pulsazione ω e numero d'onda k propaga con una velocità detta VELOCITÀ DI FASE $\boxed{v_f = \omega/k}$, con $k = 2\pi/\lambda$ lunghezza d'onda.

Il rapporto ω/k che dà la v_f non è necessariamente costante; v_f, o equivalentemente la stessa ω, è funzione dunque di k ($v_f = \omega(k)/k$). Si dice che la relazione di dispersione (così detta perché la propagazione è in un mezzo dispersivo, che dà diverse velocità, e dunque "sparpagliamento", a onde di diverso numero d'onda) può essere

NORMALE: v_f è funzione crescente di λ

ANOMALA: v_f è funzione decrescente di λ

BANALE: $v_f = \omega/k =$ costante (ω stessa costante: cfr. per esempio l'eq. di d'Alembert).

In ogni caso, banale o dispersivo che sia, un'onda monocromatica di pulsazione ω e numero d'onda k si può esprimere come

$$f(x,t) = A\exp[i(kx-\omega t)] = A\exp[ik(x-v_f t)] = g(x-v_f t)$$

(in un caso monodimensionale, per semplicità); una soluzione più generale all'eq. delle onde sarà una sovrapposizione di onde monocromatiche, ovvero, al continuo, un integrale

$$F(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(k)\exp[i(kx-\omega(k)t)]\,dk \quad : \text{pacchetto d'onda},$$

con $f(k)$ ampiezza (e funzione tale da rendere possibile l'integrale). Il caso di interesse reale è quello di una sovrapposizione di onde limitata a un intervallo di numeri/lunghezze d'onda ristretto, cioè con $f(k)$ nulla fuori da tale intervallo e un picco entro tale intervallo, corrispondente a un certo valore $k = k_0$. L'onda corrispondente a k_0, e di massima ampiezza, è l'ONDA PORTANTE del pacchetto. Si può valutare la velocità di propagazione del pacchetto nel suo insieme.

Poiché $f(k)$ è non nulla in un intervallo ristretto, $\omega(k)$ si può sviluppare al I ordine:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0}(k-k_0) = \omega(k_0) + \omega_0'(k-k_0)$$

chiamando $\omega_0' \doteq \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0}$

$$\Rightarrow F(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(k) \exp[i(kx-\omega(k)t)]\,dk = \int_{k_1}^{k_2} f(k) \exp[i(kx-\omega(k)t)]\,dk =$$

(con $[k_1, k_2]$ intervallo / $f(k)=\phi \ \forall k \notin (k_1,k_2)$; $k_0 \in [k_1,k_2]$; $f(k_0) = \max(f(k))$)

$$= \int_{k_1}^{k_2} f(k) \exp\{i[\underbrace{kx - (\omega_0 + (k-k_0)\omega_0')t}]\}\,dk =$$

$$kx - k_0x + k_0x - \omega_0 t - (k-k_0)\omega_0' t = (k-k_0)(x-\omega_0' t) + k_0x - \omega_0 t$$

$$= \int_{k_1}^{k_2} f(k) \exp\{i[(k-k_0)(x-\omega_0't) + \underbrace{k_0x-\omega_0t}_{\text{costante }(k)}]\}\,dk =$$

$$= \exp[i(k_0x-\omega_0t)] \int_{k_1}^{k_2} f(k) \exp\{i[(k-k_0)(x-\omega_0't)]\}\,dk = \quad \text{con } \eta \equiv k-k_0$$

$$= \exp[i(k_0x-\omega_0t)] \int_{k_1-k_0}^{k_2-k_0} f(\eta+k_0) \exp[i\eta(x-\omega_0't)]\,d\eta =$$

$$= \underbrace{\exp[i(k_0x-\omega_0t)]}\, g(x-\omega_0't)$$

ovvero portante che trasporta il gruppo d'onda con un'ampiezza $g(x-\omega_0't)$, ampiezza che trasla con una velocità $\boxed{v_g = \omega_0' = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0}}$ VELOCITÀ DI GRUPPO.

La traslazione non è "indolore"; se nell'espansione avessimo considerato termini di ordine superiore, nel calcolo avremmo una lenta deformazione (dispersione) del pacchetto (non c'è rigida traslazione del gruppo).

La relazione normale/anomala si riflette anche sulla grandezza relativa delle velocità v_f, v_g:

$$\frac{d}{dk}(v_f) = \frac{d}{dk}\left(\frac{\omega}{k}\right) = \frac{1}{k^2}\left(k\frac{d\omega}{dk} - \omega\right) = \frac{1}{k^2}(v_g k - \omega) \gtrless \phi$$

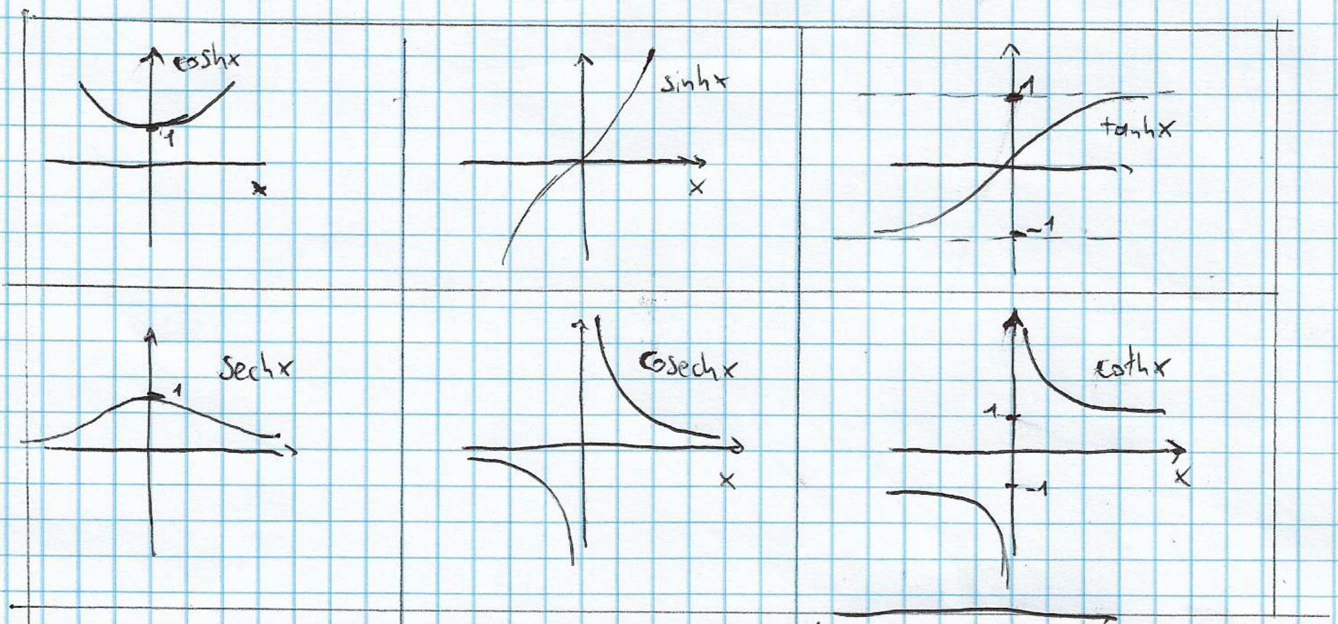
$$\Leftrightarrow \quad v_g k - \omega \gtrless \phi \quad \text{ovvero} \quad v_g \gtrless \omega/k = v_f$$

$$\left(\begin{array}{l} v_g < v_f \Leftrightarrow \frac{dv_f}{dk} < \phi = \text{rel. normale} \\ v_g > v_f \Leftrightarrow dv_f/dk > \phi = \text{rel. anomala} \end{array} \right)$$

Appendice - Vademecum minimo di funzioni iperboliche

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad ; \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad ; \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\text{sech}\, x = \frac{1}{\cosh x} \quad ; \quad \text{cosech}\, x = \frac{1}{\sinh x} \quad \forall x \neq \emptyset \quad ; \quad \coth x = \frac{1}{\tanh x} \quad \forall x \neq \emptyset$$

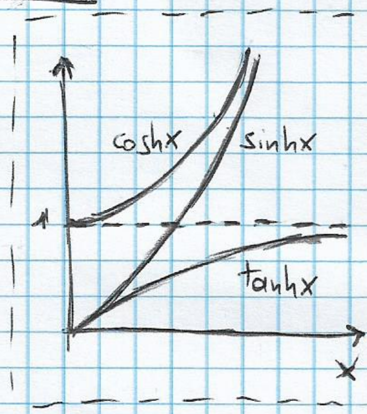


$$\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}$$

Derivate: $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$

$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$

$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \frac{d}{dx}\frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = \text{sech}^2 x$



Duplicazione: $\cosh(2x) = \sinh^2 x + \cosh^2 x = 2\sinh^2 x + 1 = 2\cosh^2 x - 1$

$\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x$

$\tanh(2x) = 2\tanh x / (1 + \tanh^2 x)$

Sviluppi di Taylor $(x \to \emptyset)$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots = \sum_{n=\emptyset}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=\emptyset}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \ldots$$

$$\coth x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \ldots$$

Integrali

$$\int \sinh^2(ax)\,dx = \frac{1}{4a}\sinh(2ax) - \frac{x}{2} + C$$

$$\int \cosh^2(ax)\,dx = \frac{1}{4a}\sinh(2ax) + \frac{x}{2} + C$$