Tensore dei gradienti delle velocità - decomposizione e significato geometrico

Chiamiamo $\dot{\underline{\underline{\Pi}}}$ il TENSORE DEI GRADIENTI DELLE VELOCITÀ definito come

$$\dot{\Pi}_{ij} \doteq \partial_j v_i \qquad (\text{cioè } \dot{\underline{\underline{\Pi}}} = \text{grad}(\bar{v}))$$

che è un tensore di rango 2 e dunque se ne può fare una (e una sola) decomposizione in componenti irriducibili. Ne vediamo il significato in termini di quello che $\dot{\Pi}_{ij}$ dice sul moto di un elemento di continuo.

La decomposizione, lo ricordiamo, di un tensore doppio è

$$\dot{\underline{\underline{\Pi}}} = \dot{\underline{\underline{\Pi}}}^S + \dot{\underline{\underline{\Pi}}}^A + \dot{\underline{\underline{\Pi}}}^I$$

simmetrico a traccia nulla, antisimmetrico, isotropo

con

$$\dot{\underline{\underline{\Pi}}}^S = \frac{1}{2}\left(\dot{\Pi}_{ij} + \dot{\Pi}_{ji} - \frac{2}{3}\dot{\Pi}_{\ell\ell}\delta_{ij}\right)$$

cioè $$\dot{\Pi}_{ij}^S = \frac{1}{2}\left(\partial_j v_i + \partial_i v_j - \frac{2}{3}\partial_\ell v_\ell \delta_{ij}\right) = \frac{1}{2}\left(\partial_j v_i + \partial_i v_j - \frac{2}{3}\text{div}(\bar{v})\delta_{ij}\right)$$

$$\dot{\underline{\underline{\Pi}}}^A = \frac{1}{2}\left(\dot{\Pi}_{ij} - \dot{\Pi}_{ji}\right) = \frac{1}{2}\left(\partial_j v_i - \partial_i v_j\right)$$

$$\dot{\underline{\underline{\Pi}}}^I = \frac{1}{3}\dot{\Pi}_{\ell\ell}\delta_{ij} = \frac{1}{3}\partial_\ell v_\ell \delta_{ij} = \frac{1}{3}\text{div}(\bar{v})\delta_{ij}$$

Ora consideriamo un elemento di continuo e in particolare due pt al suo interno

O di coordinate $\bar{x}(t)$, velocità $\bar{v}(\bar{x}(t))$

P di coordinate $\bar{y}(t)$, velocità $\bar{v}(\bar{y}(t))$

con $P - O = \bar{y} - \bar{x}$ vettore piccolo della posizione relativa di P rispetto a O;

la velocità del pt P è

$\bar{v}(\bar{y}) = \bar{v}(\bar{x}) + (\bar{y} - \bar{x})\,\text{grad}(\bar{v}(\bar{x}))$, in componenti

$v_i(\bar{y}) = v_i(\bar{x}) + (y_j - x_j)\partial_j v_i(\bar{x}) = v_i(\bar{x}) + (y_j - x_j)\dot{\Pi}_{ij} =$ usando la decomposizione

$$= v_i(\bar{x}) + (y_j - x_j)\frac{1}{2}\left(\partial_j v_i + \partial_i v_j - \frac{2}{3}\text{div}\,\bar{v}\,\delta_{ij}\right) + (y_j - x_j)\frac{1}{2}\left(\partial_j v_i - \partial_i v_j\right) + (y_j - x_j)\frac{1}{3}\text{div}\,\bar{v}\,\delta_{ij}$$

Analizzando i termini della decomposizione, potremo mostrare che il moto dell'elemento di continuo è costituito da una combinazione di:

① un moto traslatorio (associato alla parte di $\bar{v}(\bar{y})$ dettata da $\bar{v}(\bar{x})$);

② un moto rotatorio di velocità angolare $\bar{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot}\, \bar{v}$ (associato a $\dot{\underline{\underline{\Pi}}}^A$);

③ una dilatazione isotropa con velocità relativa di dilatazione $\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = \text{div}(\bar{v})$ (detto V il volume dell'elemento) (associato a $\dot{\underline{\underline{\Pi}}}^I$);

④ un moto di deformazione anisotropa, ma isocora, di lunghezze e angoli (associato a $\dot{\underline{\underline{\Pi}}}^S$).

① La parte di velocità $= \bar{v}(\bar{x})$ chiaramente è uno spostamento rigido di tutto l'elemento, in cui rispetto al pt di riferimento O tutti gli altri pt non si muovono ($\bar{v}(\bar{y}) = \bar{v}(\bar{x})$).

② Ricordiamo che esistono delle relazioni di dualità tra un tensore doppio antisimmetrico e uno pseudovettore; detto $\check{\underline{\underline{\Pi}}}$ lo pseudovettore associato al tensore $\underline{\underline{\Pi}}$, le relazioni sono

$$\check{\Pi}_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \dot{\Pi}^A_{jk}$$

$$\dot{\Pi}^A_{ij} = \varepsilon_{ijk} \check{\Pi}_k$$

$$\Rightarrow (y_j - x_j)\frac{1}{2}(\partial_j v_i - \partial_i v_j) = (y_j - x_j)\dot{\Pi}^A_{ij} = (y_j - x_j)\varepsilon_{ijk}\check{\Pi}_k = -\varepsilon_{ikj}\check{\Pi}_k(y_j - x_j) =$$

$= \text{definendo } \omega_k \doteq -\check{\Pi}_k = [\bar{\omega} \times (\bar{y} - \bar{x})]_i$

Si noti che

$$\omega_i = -\check{\Pi}_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\dot{\Pi}^A_{jk} = -\frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}(\partial_k v_j - \partial_j v_k) =$$

$$= -\frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}\partial_k v_j + \frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}\partial_j v_k = \frac{1}{4}\varepsilon_{ikj}\partial_k v_j + \frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}\partial_j v_k = \frac{1}{4}(\text{rot}\,\bar{v})_i + \frac{1}{4}(\text{rot}\,\bar{v})_i =$$

$$= \frac{1}{2}(\text{rot}\,\bar{v})_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{\omega} = \frac{1}{2}\text{rot}\,\bar{v}}$$

Dunque c'è un pezzo di velocità relativa $\bar{v}(\bar{y}) - \bar{v}(\bar{x})$ che è $= \frac{1}{2}[\bar{\omega} \times (\bar{y} - \bar{x})]$, ovvero una rotazione rigida attorno a un asse passante per O, con velocità di rotazione $\bar{\omega}$.

③ Consideriamo il termine $(y_j - x_j)\frac{1}{3}\text{div}\,\bar{v}\,\delta_{ij}$, o vettorialmente, $(\bar{y} - \bar{x})\frac{1}{3}\text{div}\,\bar{v}$. Preso un $\forall$ pt N nell'elemento di continuo questo termine di velocità dà un contributo

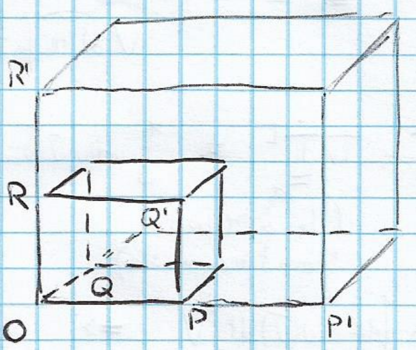
$$\bar{v}(N) - \bar{v}(O) = \frac{1}{3}\text{div}(\bar{v}(\bar{x}(O)))(\bar{x}(N) - \bar{x}(O))$$

ovvero una velocità lungo la congiungente $N-O$ e con un coefficiente $\frac{1}{3}\operatorname{div}\bar{J}$ che è uguale $\forall N$. Se prendiamo nell'elemento quattro pt O, P, Q, R che al tempo t individuano gli spigoli $P-O$, $Q-O$, $R-O$ di un parallelepipedo ω esimo, al tempo $t+dt$ avremo

$\bar{x}' = \bar{x} + v(\bar{x})\,dt$ per $O' = O(t+dt)$

$\bar{y}' = \bar{y} + \bar{J}(\bar{y})\,dt = \bar{y} + \left[v(\bar{x}) + \frac{1}{3}\operatorname{div}(\bar{J}(\bar{x}))\,(\bar{y}-\bar{x})\right] dt$ per $P' = P(t+dt)$ e così Q', R'

da cui $\bar{y}' - \bar{x}' = \left[1 + \frac{1}{3}\operatorname{div}(\bar{v}(x))\,dt\right](\bar{y}-\bar{x})$



Al netto del moto traslatorio di O con $v(\bar{x})$ che porta O in O', si vede che gli altri pt si muovono portandosi in nuove posizioni con uno stesso coefficiente di proporzionalità seguendo le direzioni individuate già al tempo t. Si tratta effettivamente di una DILATAZIONE ISOTROPA, che conserva gli angoli.

Inoltre si ritrova un risultato già ottenuto valutando la derivata sostanziale degli integrali di volume, quando si era considerata una grandezza $F(\bar{x},t) = 1$ e la sua grandezza integrale associata $\mathcal{F}(t) = \int_{R(t)} F(\bar{x},t)\,d^3x = V$ volume:

$$\frac{DV}{Dt} = \int_{R(t)} \left[\frac{DF}{Dt} + F \operatorname{div}\bar{J}\right] d^3x = \int_{R(t)} \operatorname{div}\bar{J}\,d^3x$$

e cioè il fatto che la variazione di volume ha a che fare con la $\operatorname{div}\bar{J}$. Lo rivediamo considerando un parallelepipedo con vertice O origine e tre vertici P_1, P_2, P_3 che determinano gli spigoli $P_i - O$ con $i = 1, 2, 3$. Il volume si può scrivere come

$V = \left[\bar{x}(P_1) \times \bar{x}(P_2)\right] \cdot \bar{x}(P_3)$ (in cui abbiamo appunto considerato O come origine, così da avere $\bar{x}(P_n) - \bar{x}(0) \to \bar{x}(P_n)$ più snello)

altrimenti scritto in forma tensoriale

$V = \varepsilon_{ijk}\, x_j(P_1)\, x_k(P_2) \cdot x_i(P_3)$

e poiché $\det \underline{\underline{A}} = \varepsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3} = \varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$

se prendo come $A_{hk} = x_h(P_k)$ riscrivo in generale V così:

$$V = \varepsilon_{ijk}\, x_j(P_r)\, x_k(P_s)\, x_i(P_t) = \det\left[x_e(P_h)\right]$$

Allora $V' = \det\left[x_i'(P_h)\right] \underset{\uparrow}{=} \det\left[\left(\underline{\underline{\mathbb{1}}} + \dot{\underline{\underline{\Pi}}}\, dt\right)_{ij} x_j(P_h)\right] =$

$$x_i'(P_h) = x_i(P_h) + \partial_j v_i\, x_j(P_h)\, dt$$

$$= \det\left(\underline{\underline{\mathbb{1}}} + \dot{\underline{\underline{\Pi}}}\, dt\right) \underbrace{\det\left[x_j(P_h)\right]}_{V \text{ al tempo } t} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per } dt \\ \text{piccolissimo}}}{=} \left(1 + \mathrm{Tr}\, \dot{\underline{\underline{\Pi}}}\, dt\right) V$$

$$\mathrm{Tr}\, \dot{\underline{\underline{\Pi}}} = \mathrm{Tr}\, \dot{\underline{\underline{\Pi}}}^{I} = \frac{1}{3}\, \mathrm{div}\, \bar{v}\, \delta_{ii} = \mathrm{div}\, \bar{v}$$

(le altre parti hanno traccia nulla)

$$\Rightarrow V' = \left[1 + \mathrm{div}(\bar{v})\, dt\right] V \quad \Rightarrow \quad \frac{V' - V}{V} = \mathrm{div}(\bar{v})\, dt,$$ con $V' - V = dV$ variazione piccolissima

$$\Rightarrow \frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = \mathrm{div}\, \bar{v}$$

4) Vediamo la parte di velocità associata a $\dot{\underline{\underline{\Pi}}}^{s}$: $(y_j - x_j)\frac{1}{2}\left(\partial_j v_i + \partial_i v_j - \frac{2}{3}\mathrm{div}\, \bar{v}\, \delta_{ij}\right)$

Se facessimo un calcolo dello stesso tipo di quello appena svolto sopra, in cui si valuta il volume V a $t+dt$, utilizzando la parte simmetrica $\dot{\underline{\underline{\Pi}}}^{s}$ di $\dot{\underline{\underline{\Pi}}}$, essendo questa a traccia nulla avremmo $V' = (1 + \underbrace{\mathrm{Tr}\, \dot{\underline{\underline{\Pi}}}^{s}}_{\emptyset} \cdot dt) V = V$: il volume è preservato da questa componente del moto, che non dà una dilatazione (uno dei suoi spigoli $P_i - O$ a $t+dt$ dev'essere più corto).

Più in dettaglio, se ci poniamo nel sdr degli assi principali, cioè sdr in cui $\dot{\underline{\underline{\Pi}}}^{s}$ è diagonale:

$$\dot{\underline{\underline{\Pi}}}^{s} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \alpha_2 & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

Prendiamo un elemento che al tempo t sia un parallelepipedo retto definito da tre spigoli $P_i - O$ / ogni spigolo sia parallelo a un asse coordinato. Ciò significa che i vettori $P_i - O$ sono autovettori di $\dot{\underline{\underline{\Pi}}}^{s}$, e al tempo $t+dt$

$$\bar{x}(P_i') - \bar{x}(O') = \left(\underline{\underline{\mathbb{1}}} + \dot{\underline{\underline{\Pi}}}^{s} dt\right)\left[\bar{x}(P_i) - \bar{x}(O)\right] = (1 + \alpha_i\, dt)\left[\bar{x}(P_i) - \bar{x}(O)\right]$$

cioè si ha ancora un parallelepipedo retto; poiché $\sum_i \alpha_i = \emptyset$, non sono tutte dilatazioni uguali ne' tanto meno tutte positive.

Se il parallelepipedo non e' con gli spigoli diretti lungo gli assi principali, le componenti lungo gli assi di ogni spigolo subiscono "stiramenti" diversi, perciò lo spigolo viene riorientato ∞mente. La trasformazione vettoriale si associa per dt ∞esimo, ma non rispetta ne' lunghezze ne' angoli (un parallelepipedo retto si trasforma in uno non retto). Se facciamo il prodotto scalare tra due spigoli (così da vedere che angolo formano)

$$\langle \bar{y}_1' - \bar{x}', \bar{y}_2' - \bar{x}' \rangle = \langle (\underline{\underline{1}} + \dot{\underline{\underline{\Pi}}}^S dt)(\bar{y}_1 - \bar{x}), (\underline{\underline{1}} + \dot{\underline{\underline{\Pi}}}^S dt)(\bar{y}_2 - \bar{x}) \rangle =$$

$$= \langle (\bar{y}_1 - \bar{x}), (\underline{\underline{1}} + \dot{\underline{\underline{\Pi}}}^S dt)^2 (\bar{y}_2 - \bar{x}) \rangle = \text{(al primo ordine } (\underline{\underline{1}} + \dot{\underline{\underline{\Pi}}}^S dt)^2 \simeq 1 + 2\dot{\underline{\underline{\Pi}}}^S dt)$$

$$= \underbrace{\langle (\bar{y}_1 - \bar{x}), (\bar{y}_2 - \bar{x}) \rangle}_{\text{componente = al tempo } t} + \underbrace{\langle (\bar{y}_1 - \bar{x}), 2\dot{\underline{\underline{\Pi}}}^S dt (\bar{y}_2 - \bar{x}) \rangle}_{\text{termine nullo solo se spigoli // assi principali}}$$

NOTA 1: mentre a $\dot{\underline{\underline{\Pi}}}^A$ compete una rotazione, le altre due componenti danno deformazione, per cui si può anche definire un <u>TENSORE DELLE VELOCITÀ DI DEFORMAZIONE</u> $\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}$

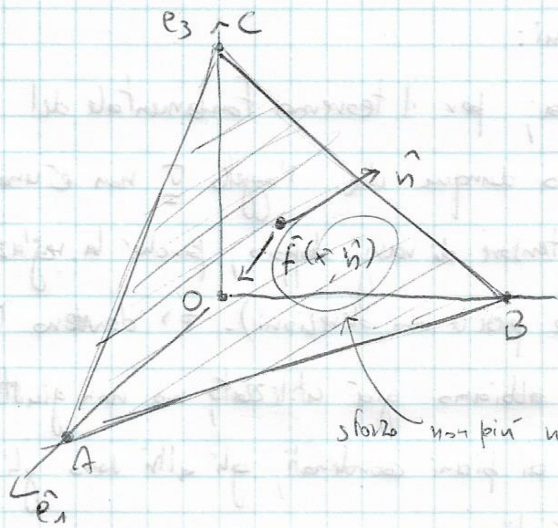
$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} \doteq \dot{\underline{\underline{\Pi}}}^S + \dot{\underline{\underline{\Pi}}}^I \quad \text{di componenti} \quad \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^S \doteq \dot{\underline{\underline{\Pi}}}^S, \quad \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^I \doteq \dot{\underline{\underline{\Pi}}}^I$$

NOTA 2: mentre per i fluidi si parla di $\dot{\underline{\underline{\Pi}}}$, tensore dei gradienti delle velocità, per i solidi elastici più che di velocità si tratta in termini di deformazioni o <u>spostamenti</u>. Ma è analogo, perché basta moltiplicare la vel. per dt per ottenere uno spostamento ∞esimo, dunque moltiplicando $\dot{\underline{\underline{\Pi}}}$ per dt si avrà un tensore dei gradienti degli spostamenti per il quale valgono tutte le considerazioni fatte finora.

Fluidi reali (viscosi) - relazione di Cauchy

Con un procedimento che ricalca la logica con cui abbiamo dimostrato l'isotropia della pressione per un fluido perfetto o un fluido anche reale ma in quiete (equilibrio), si può trovare una relazione tra forze di superficie e sforzi, valida per un qualsiasi continuo, che garantisce il carattere tensoriale di σ_{ij}, matrice degli sforzi; ovvero validiamo il termine, già usato in precedenza, di TENSORE DEGLI SFORZI per σ_{ij}.

Si riprenda in considerazione il tetraedro ooesimo di diametro l usato per dimostrare l'isotropia di p, di vertici OABC. Esprimiamo gli sforzi sulle varie facce, considerando



faccia S_n (ABC) orientata con $\hat{n}$, sup. A_n

faccia S_1 (OBC) orientata con $-\hat{e}_1$, sup. A_1

faccia S_2 (OAC) orientata con $-\hat{e}_2$, sup. A_2

faccia S_3 (OAB) orientata con $-\hat{e}_3$, sup. A_3

che scriverli come applicati tutti nello stesso pt con vettore posizione $\bar{x}$ fa commettere un errore di ordine di infinitesimo $O(l)$. Quindi esprimiamo tutti gli sforzi $\bar{f}$ in $\bar{x}(O)$;

su S_n c'è $\bar{f}(\bar{x},\hat{n})$ (sforzi considerati da fuori verso le opportune facce),

su S_i c'è $f(\bar{x},-\hat{e}_i) = -f(\bar{x},\hat{e}_i) \quad \forall i=1,2,3$.

Per la prima equazione cardinale della dinamica, la risultante $\bar{R}$ delle forze (di superficie e volume che siano) sull'elemento di continuo dà l'accelerazione $\bar{a}$ del centro di massa per la massa stessa, $\bar{R} = m\bar{a}$. Ricordando che $A_j = A_n(\hat{n}\cdot\hat{e}_j) = A_n n_j$, l'equazione cardinale in componente i-esima è

$$\left[f_i(\bar{x},\hat{n}) - f_i(\bar{x},\hat{e}_1)n_1 - f_i(\bar{x},\hat{e}_2)n_2 - f_i(\bar{x},\hat{e}_3)n_3\right]A_n + \underbrace{\rho g_i V}_{\substack{\text{forze di volume}\\ \sim O(l^3) = O(V)}} + \underbrace{O(l^3)}_{\substack{\text{errori su forze di volume compiuti per}\\ \text{calcolo in } O(\bar{x}) \to \sim O(l^3)}} - \rho \overbrace{V}^{O(V)=O(l^3)} a_i = 0$$

con g_i, risultante delle forze di volume.

Volendo annullare l'espressione, il confronto degli infinitesimi richiede che gli sforzi di superficie, che sono $O(\ell^2)$, si annullino separatamente da quelli $O(\ell^3)$; dunque

$$f_i(\bar{x}, \hat{n}) = f_i(\bar{x}, \hat{e}_1)n_1 + f_i(\bar{x}, \hat{e}_2)n_2 + f_i(\bar{x}, \hat{e}_3)n_3$$

e chiamando

$$\sigma_{ij} = f_i(\bar{x}, \hat{e}_j)$$

si ha

$$f_i(\bar{x}, \hat{n}) = \sigma_{i1}(\bar{x})n_1 + \sigma_{i2}(\bar{x})n_2 + \sigma_{i3}(\bar{x})n_3 = \sigma_{ij}(\bar{x})n_j$$

ovvero

$$\boxed{f_i(\bar{x}, \hat{n}) = \sigma_{ij}(\bar{x})n_j} \quad \text{Relazione di Cauchy}$$

Si possono notare alcune importanti osservazioni:

* $\bar{F}$ e $\hat{n}$ sono vettori con direzione arbitraria; per il teorema fondamentale del calcolo tensoriale (regola del quoziente) abbiamo dunque che l'oggetto $\underline{\underline{\sigma}}$ non è una qualsiasi matrice, ma geometricamente è un tensore di rango doppio, perché la relazione tra $\bar{F}$ e $\hat{n}$ deve valere in $\forall$ sdr (comunque prese le loro direzioni). $\Rightarrow$ davvero $\underline{\underline{\sigma}}$ è il TENSORE DEGLI SFORZI (nome che abbiamo già utilizzato, ma non giustificato).
* la diagonale σ_{ii} dà gli <u>sforzi normali</u> ai piani coordinati, gli altri sono gli <u>sforzi tangenziali</u> o <u>di taglio</u> ai piani coordinati.
* Data una superficie di normale $\hat{n}$, lo sforzo normale a tale superficie è

  $\sigma_{ij} n_i n_j$ (proiezione dello sforzo lungo $\hat{n}$)

  e se invece $\hat{t}$ è un versore lungo tale superficie (tg'ale) possiamo scrivere lo sforzo di taglio in quella direzione è

  $\sigma_{ij} t_i n_j$ (proiezione dello sforzo lungo $\hat{t}$).
* Un fatto che è <u>osservato</u> (mentre talvolta è "dimostrato" con procedura erronea) è che σ_{ij} è frequentemente <u>SIMMETRICO</u>: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Questo vale per i fluidi che potremmo dire "ordinari", ovvero non polari (sono polari quando contengono molecole con dipoli elettrici o magnetici, come catene polimeriche - sostanze polari - o sospensioni di particelle ferromagnetiche). Ci torneremo su tra poco.

Tensore degli sforzi newtoniano – equazione di Navier-Stokes

Come già detto, il tensore degli sforzi σ_{ij} si può separare in una parte di pressione (l'unica non nulla per fluidi perfetti o in quiete) e una residua in cui confluiscono gli sforzi non ideali, viscosi, e ⇒ detta σ'_{ij} tensore degli sforzi viscoso:

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - p\delta_{ij}$$

Il tensore viscoso σ'_{ij} è detto NEWTONIANO, e così anche il fluido che esso descrive, quando valgono determinate condizioni:

1. ∃ una <u>relazione costitutiva lineare</u> tra tensore viscoso e tensore dei gradienti delle velocità $\dot{\Pi}_{ij}$
2. il fluido è isotropo;
3. il tensore degli sforzi è simmetrico.

La ① equivale a dire che c'è una relazione $\sigma'_{ij} = A_{ijhk}\dot{\Pi}_{hk}$.

La ②, isotropia del fluido, impone che non ci siano sdr privilegiati, cioè la relazione costitutiva deve esprimere la stessa dipendenza tra sforzi e gradienti di velocità (deformazioni) in ∀ direzione di osservazione. La forma di A_{ijhk} è ⇒ del tipo (cfr. Teorema 17, paragrafo 2.1 del Segel)

$$A_{ijhk} = a\delta_{ij}\delta_{hk} + b\delta_{ih}\delta_{jk} + c\delta_{ik}\delta_{jh}$$ che nella rel costitutiva dà

$$\sigma'_{ij} = a\delta_{ij}\delta_{hk}\dot{\Pi}_{hk} + b\delta_{ih}\delta_{jk}\dot{\Pi}_{hk} + c\delta_{ik}\delta_{jh}\dot{\Pi}_{hk} =$$

$$= a\delta_{ij}\dot{\Pi}_{hh} + b\dot{\Pi}_{ij} + c\dot{\Pi}_{ji} = \quad \text{con decomposizione } \dot{\underline{\underline{\Pi}}} = \dot{\underline{\underline{\Pi}}}^S + \dot{\underline{\underline{\Pi}}}^A + \dot{\underline{\underline{\Pi}}}^I$$

$$= \underbrace{a\,Tr(\dot{\Pi}_{ij})\delta_{ij}}_{3\dot{\Pi}^I_{ij}} + b\dot{\Pi}^S_{ij} + b\dot{\Pi}^A_{ij} + b\dot{\Pi}^I_{ij} + \underbrace{c\dot{\Pi}^S_{ji}}_{=\dot{\Pi}^S_{ij}} + \underbrace{c\dot{\Pi}^A_{ji}}_{=-\dot{\Pi}^A_{ij}} + \underbrace{c\dot{\Pi}^I_{ji}}_{=\dot{\Pi}^I_{ij}} =$$

$$= (b+c)\dot{\Pi}^S_{ij} + (b-c)\dot{\Pi}^A_{ij} + (3a+b+c)\dot{\Pi}^I_{ij}$$

La ③ richiede σ'_{ij} simmetrico, ⇒ la parte linearmente dipendente da $\dot{\Pi}^A_{ij}$ dev'essere nulla:

$\underline{b=c}$ ⇒

$$\sigma'_{ij} = 2b\dot{\Pi}^S_{ij} + (3a+2b)\dot{\Pi}^I_{ij} \quad \text{e chiamando } \eta \doteq b, \quad \zeta \doteq a + \tfrac{2}{3}b$$

rispettivamente primo (η) e <u>secondo</u> (ζ) coefficiente di viscosità

$$\boxed{\sigma'_{ij} = 2\eta\dot{\Pi}^S_{ij} + 3\zeta\dot{\Pi}^I_{ij} = 2\eta\dot{\varepsilon}^S_{ij} + 3\zeta\dot{\varepsilon}^I_{ij}}$$

Esprimendo esplicitamente che $\dot{\Pi}_{ij} = \partial_j v_i$ si ottiene

$$\sigma'_{ij} = \eta\left(\dot{\Pi}_{ij} + \dot{\Pi}_{ji} - \frac{2}{3}\mathrm{Tr}(\dot{\Pi}_{ij})\delta_{ij}\right) + \zeta\,\mathrm{Tr}(\dot{\Pi}_{ij})\delta_{ij} =$$

$$= \eta\left(\partial_j v_i + \partial_i v_j - \frac{2}{3}\mathrm{div}(\bar{v})\delta_{ij}\right) + \zeta\,\mathrm{div}(\bar{v})\,\delta_{ij}$$

e $\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - p\delta_{ij} = \eta\left(\partial_j v_i + \partial_i v_j - \frac{2}{3}\mathrm{div}(\bar{v})\delta_{ij}\right) + \left(\zeta\,\mathrm{div}(\bar{v}) - p\right)\delta_{ij}$ tensore degli sforzi completo

Riconsideriamo la prima equazione cardinale della dinamica in forma locale,

$\frac{D\bar{v}}{Dt} = \bar{f}$ con $\bar{f}$ forza per unità M;

per un flusso perfetto avevamo $\bar{f} = \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}(-p)$; ora alla pressione dobbiamo sostituire gli sforzi nel loro complesso, per cui, in componenti,

$f_i = \frac{1}{\rho}\partial_j\sigma_{ij} + g_i$ (con $\bar{g}$ generica forza di volume da potenziale ext);

dall'espressione di σ_{ij}

$$f_i = \frac{1}{\rho}\partial_j\left[\eta\left(\partial_j v_i + \partial_i v_j - \frac{2}{3}\mathrm{div}(\bar{v})\delta_{ij}\right) + \zeta\,\mathrm{div}(\bar{v})\delta_{ij} - p\delta_{ij}\right] + g_i = {}^*$$

$$= \frac{\eta}{\rho}\Big(\underbrace{\partial_j\partial_j v_i}_{=\nabla^2 v_i} + \underbrace{\partial_j\partial_i v_j}_{=\partial_i\partial_j v_j = \partial_i\,\mathrm{div}(\bar{v})} - \frac{2}{3}\underline{\partial_j\,\mathrm{div}(\bar{v})\delta_{ij}}\Big) + \frac{\zeta}{\rho}\underbrace{\partial_j\,\mathrm{div}(\bar{v})\delta_{ij}}_{=\partial_i\,\mathrm{div}(\bar{v})} - \frac{1}{\rho}\underbrace{\partial_j p\,\delta_{ij}}_{=\partial_i p} + g_i =$$

$$= \frac{\eta}{\rho}\nabla^2 v_i + \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{3}\eta + \zeta\right)\partial_i(\mathrm{div}\,\bar{v}) - \frac{1}{\rho}\partial_i p + g_i$$ e $\Rightarrow$ inserendo nella 1 eq. della dinamica

$$\frac{D\bar{v}}{Dt} = \boxed{\frac{\partial\bar{v}}{\partial t} + (\bar{v}\cdot\mathrm{grad})\bar{v} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p + \frac{\eta}{\rho}\nabla^2\bar{v} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{3}\eta + \zeta\right)\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\bar{v}) + \bar{g}}$$

EQUAZIONE DI NAVIER-STOKES

Il caso (frequente) di flusso incomprimibile, per cui $\mathrm{div}\,\bar{v} = \emptyset$, semplifica l'eq. di N.-S. a

$$\boxed{\frac{\partial\bar{v}}{\partial t} + (\bar{v}\cdot\mathrm{grad})\bar{v} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p + \frac{\eta}{\rho}\nabla^2\bar{v} + \bar{g}}$$

dove a descrivere il carattere viscoso del fluido resta il solo coefficiente η, detto coeff. di <u>viscosità dinamica</u>; se ne definisce anche $\nu \doteq \eta/\rho$ coeff. di <u>viscosità cinematica</u> (si noti che per un gas ρ a una certa T dipende da p, e $\Rightarrow$ ν ne dipende a sua volta, mentre η no).

⊙ Come sempre per le equazioni alle derivate parziali, l'eq. di Navier-Stokes va corredata di opportune condizioni al contorno. Dove per un fluido perfetto si aveva una condizione

---

* = in generale η, ζ sono funzioni delle variabili termodinamiche cioè $f(p, T)$ ma le trattiamo come costanti

soltanto sulla componente normale della velocità relativa del fluido rispetto alla superficie solida di limite del dominio, mentre, grazie all'assenza di attrito, si poteva ipotizzare uno scorrimento tangenziale libero (free-slip condition),

ora, per il fluido viscoso,

oltre a $v_{relativa\,\perp} = \emptyset$

si impone anche velocità tangenziale relativa nulla (non c'è scorrimento, no-slip condition),

$\Rightarrow$ $\bar{v}_{relativa} = \emptyset$ sul boundary.

All'interfaccia tra due fluidi immiscibili, oltre al raccordo tra le velocità ($\bar{v}^{(1)} = \bar{v}^{(2)}$) si deve avere sforzo 1->2 uguale e contrario a sforzo 2->1, cioè

$n_k^{(1)} \sigma_{ik}^{(1)} + n_k^{(2)} \sigma_{ik}^{(2)} = \emptyset$; poiché $\hat{n}^{(1)} = -\hat{n}^{(2)} = \hat{n}$ (identifichiamo un solo versore normale),

$\Rightarrow$ $n_i \sigma_{ik}^{(1)} = n_i \sigma_{ik}^{(2)}$; su pelo libero (fluido 2 trascurabile) $\sigma_{ik} n_k = \sigma'_{ik} n_k - p n_i = \emptyset$

⊙ Per l'eq. di Eulero (flusso ideale) incomprimibile, applicando il rotore si trovava

$$\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot}\,\bar{v}) - \text{rot}(\bar{v} \times \text{rot}\,\bar{v}) = \emptyset$$ cioè si eliminava p dall'equazione;

la stessa procedura applicata a N.-S. (flusso reale incomprimibile) ne dà la forma alternativa

$$\frac{\partial}{\partial t}\text{rot}\,\bar{v} - \text{rot}(\bar{v} \times \text{rot}\,\bar{v}) + \nu \nabla^2(\text{rot}\,\bar{v})$$

Poiché $\begin{cases} \text{rot}(\bar{v} \times \text{rot}\,\bar{v}) = \bar{v}\,\cancel{\text{div}(\text{rot}\,\bar{v})} - \cancel{\text{rot}\,\bar{v}\,\text{div}\,\bar{v}} + (\text{rot}\,\bar{v} \cdot \text{grad})\bar{v} - (\bar{v} \cdot \text{grad})\,\text{rot}\,\bar{v} \\ \text{div}\,\bar{v} = \emptyset \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\text{rot}\,\bar{v} + (\bar{v} \cdot \text{grad})\,\text{rot}\,\bar{v} - (\text{rot}\,\bar{v} \cdot \text{grad})\,\bar{v} = \nu \nabla^2\,\text{rot}\,\bar{v}$$

⊙ La complessità dell'eq. di N.-S. (che è nonlineare), per la quale $\nexists$ soluzioni analitiche per qualsivoglia set di b.c., ma solo per alcuni casi, l'ha resa uno dei "Millennium Problems" del Clay Mathematics Institute, ovvero uno dei sette problemi la cui risoluzione, visto il grande interesse matematico e scientifico generale, verrebbe premiata con un milione di dollari; oltre che, ricompensa sicuramente più eccezionale*, un'indubbia fama.

* = dedicarsi alla scienza pura per il denaro è spesso segno di scarse capacità di valutazione costi-benefici...