

Momento angolare e considerazioni sulla simmetria del tensore degli sforzi

Per vedere sotto quali condizioni si possa dire che σ_{ij} è simmetrico si devono fare alcune considerazioni fondamentali.

① Equazioni cardinali della dinamica - momento angolare

- Per la prima eq. cardinale della dinamica, il moto di traslazione di un sistema è quello del centro di massa (CM) sotto la risultante delle forze esterne in esso applicate \bar{R} .

- Per la seconda eq. cardinale della dinamica, il momento della risultante delle forze esterne \bar{T} è uguale alla derivata temporale del momento angolare (considerando per ora solo un momento angolare \bar{L} "orbitale", del tipo $\bar{r} \times \bar{p}$): $\bar{T} = \dot{\bar{L}} = \frac{d\bar{L}}{dt}$.

- La conseguenza delle due eq. è che si può parlare a scrivere

$$\frac{d\bar{L}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt} (M \bar{x}_{CM} \times \bar{v}_{CM}) = \bar{x}_{CM} \times \bar{R} \quad \text{momento delle forze nel CM}$$

Per un elemento di continuo di posizione \bar{r} e velocità \bar{v} la coincidenza del momento angolare orbitale per unità di massa $\bar{\ell} (= \lim_{V \rightarrow 0} \bar{L}/M)$ con il momento angolare orbitale del CM \bar{L}_{CM} è facilmente verificabile per eliminazione di termini di ordine superiore. Infatti:

$$\bar{\ell}_i = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{M} \int_R \rho \epsilon_{ijk} x_j v_k d^3x =$$

(V volume e massa dell'elemento; omettiamo per il limite nei passaggi successivi, limite comunque "fisico" e non matematico, come al solito)

$$= \frac{1}{M} \int_R \rho \epsilon_{ijk} [(x_j - x_{CMj}) + x_{CMj}] (v_k - v_{CMk}) d^3x + \frac{1}{M} \int_R \rho \epsilon_{ijk} [(x_j - x_{CMj}) + x_{CMj}] v_{CMk} d^3x =$$

$$= \frac{1}{M} \int_R \rho \epsilon_{ijk} (x_j - x_{CMj}) (v_k - v_{CMk}) d^3x + \frac{1}{M} \int_R \rho \epsilon_{ijk} x_{CMj} (v_k - v_{CMk}) d^3x + \frac{1}{M} \int_R \rho \epsilon_{ijk} (x_j - x_{CMj}) v_{CMk} d^3x + \frac{1}{M} \int_R \rho \epsilon_{ijk} x_{CMj} v_{CMk} d^3x =$$

$\Delta v \sim \frac{dv}{dx} \Delta x \rightarrow O(\Delta x)$
 $\leftarrow O((\bar{x} - \bar{x}_{CM})^5)$
 $\leftarrow O((\bar{x} - \bar{x}_{CM})^4)$ } trascurabili
 $\leftarrow O((\bar{x} - \bar{x}_{CM})^4)$
 $= O((\bar{x} - \bar{x}_{CM})^3)$

= approssimando l'integrale per volume piccolo $\approx \frac{1}{M} \rho \epsilon_{ijk} x_{CMj} v_{CMk} V = \epsilon_{ijk} x_{CMj} v_{CMk} = \bar{L}_{CMi}$

$\Rightarrow \bar{\ell}_i = \bar{L}_{CMi}$

② Momento delle forze esterne

Utilizzando il tensore degli sforzi $\underline{\sigma}$, le forze di volume \vec{F} e le coppie di volume \vec{C} (che potrebbero essere, per esempio, coppie di forze prodotte da campi elettrici/magnetici su dipoli elettrici/magnetici eventualmente presenti nel continuo, e quindi di volume, proporzionali alla densità di tali dipoli), scriviamo la risultante dei momenti delle forze esterne per unità di massa, cioè $\vec{z} = \lim_{V \rightarrow \phi} \vec{T}/M$, su una regione R di volume V e massa M

di continuo:

$$\vec{z}_i = \lim_{V \rightarrow \phi} \frac{1}{M} \int_{\partial R} \epsilon_{ijk} x_j \underbrace{\sigma_{ke} n_e}_{\text{forze di superficie}} da + \frac{1}{M} \int_R \epsilon_{ijk} x_j \underbrace{\rho f_k}_{\text{forze di volume}} d^3x + \frac{1}{M} \int_R \rho c_i d^3x = \text{(omettendo il limite)}$$

momento delle forze di superficie
momento delle forze di volume
coppie di volume

(col teorema della divergenza)

$$= \frac{1}{M} \int_R \epsilon_{ijk} \partial_e (x_j \sigma_{ke}) d^3x + \frac{1}{M} \int_R \rho \epsilon_{ijk} x_j f_k d^3x + \frac{1}{M} \int_R \rho c_i d^3x =$$

$$= \frac{1}{M} \int_R \epsilon_{ijk} \left[\underbrace{(\partial_e x_j)}_{\delta_{je}} \sigma_{ke} + x_j \partial_e \sigma_{ke} \right] d^3x + \frac{1}{M} \int_R \rho \epsilon_{ijk} x_j f_k d^3x + \frac{1}{M} \int_R \rho c_i d^3x =$$

$$= \frac{1}{M} \int_R \epsilon_{ijk} (\sigma_{kj} + x_j \partial_e \sigma_{ke}) d^3x + \text{idem} = \text{approssimando l'integrale su piccolo volume}$$

$$= \frac{1}{M} \epsilon_{ijk} (\sigma_{kj} + x_j \partial_e \sigma_{ke}) V + \frac{1}{M} \rho \epsilon_{ijk} x_j f_k V + \frac{1}{M} \rho c_i V \Rightarrow \text{riannunciando}$$

$$\boxed{\vec{z}_i = \frac{1}{\rho} \epsilon_{ijk} x_j (\partial_e \sigma_{ke} + \rho f_k) + \frac{1}{\rho} \epsilon_{ijk} \sigma_{kj} + c_i}$$

③ (= ①+②) Momento angolare orbitale e di spin

Riprendiamo il momento angolare per unità di massa; consideriamo che esso sia dato da un contributo orbitale $\vec{\ell}$, ovvero del tipo già visto $\vec{r} \times \vec{v}$, e da un altro termine per ora generico \vec{s} : $\vec{g} = \vec{\ell} + \vec{s}$.

Per la seconda eq. cardinale della dinamica,

$$\vec{z} = \dot{\vec{g}} = \dot{\vec{\ell}} + \dot{\vec{s}} = \vec{\ell}_{ch} + \vec{s}_{ch} \quad \text{o in componenti } z_i = \dot{\ell}_{ch_i} + \dot{s}_{ch_i}$$

Si noti che abbiamo ricavato un'espressione per \bar{L}_i

$$L_i = \frac{\rho}{\rho} \epsilon_{ijk} x_j (\rho \sigma_{kl} + p \delta_{kl}) + \frac{1}{\rho} \epsilon_{ijk} \sigma_{kl} + c_i = \bar{L}_{ori} + \bar{S}_i$$

e poiché il momento angolare orbitale è del tipo $\bar{x} \times \bar{v}$ ($\epsilon_{ijk} x_j v_k$) è chiara l'associazione

$$\bar{L}_i = \bar{L}_{ori} = \frac{\rho}{\rho} \epsilon_{ijk} x_j (\rho \sigma_{kl} + p \delta_{kl})$$

e di conseguenza

$$\bar{S}_i = \frac{1}{\rho} \epsilon_{ijk} \sigma_{kl} + c_i ;$$

è un termine che non è costruito nella forma $\bar{x} \times$ (vettore), cioè è un termine indipendente dalla scelta di un polo, ed invece un termine "di spin" (classico).

Fatto importante, il termine $\frac{1}{\rho} \epsilon_{ijk} \sigma_{kl}$ è non nullo solo se $\underline{\sigma}$ ha una parte antisimmetrica, infatti calcolando esplicitamente $\epsilon_{ijk} \sigma_{kl}$

$$\text{per } i=1 \quad \epsilon_{1jk} \sigma_{kl} = \sigma_{32} - \sigma_{23}$$

$$i=2 \quad \epsilon_{2jk} \sigma_{kl} = -\sigma_{31} + \sigma_{13}$$

$$i=3 \quad \epsilon_{3jk} \sigma_{kl} = \sigma_{21} - \sigma_{12}$$

Complessivamente, \bar{S} momento di spin contribuisce alla dinamica ($\bar{S} \neq \phi$) solo se ci sono coppie di volume \bar{c} oppure $\underline{\sigma}$ ha una parte antisimmetrica.

④ Conclusioni

* STATICA

Le eq. della statica impongono $\bar{R} = \phi$ (risultante delle forze esterne nulla)

$\bar{T} = \phi$ (momento della risultante \bar{R} nulla)

Il momento deve essere nullo rispetto a qualsiasi polo, perciò per avere un sistema in equilibrio,

- in assenza di coppie di volume esterne ($\bar{c} = \phi$) è richiesto

$$\frac{1}{\rho} \epsilon_{ijk} \sigma_{kl} = \phi \quad \text{ovvero} \quad \sigma_{ij}^A = \phi \quad \text{TENSORE DEGLI SFORZI SIMMETRICO}$$

- se $\exists \bar{c} \neq \phi$

$\frac{1}{\rho} \epsilon_{ijk} \sigma_{kl} + c_i = \phi \Rightarrow \sigma_{ij}$ non può essere simmetrico (e infatti non lo è per liquidi polari, per esempio, dove ci sono coppie di volume).

* DINAMICA

Da quanto detto segue che la simmetria di σ_{ij} osservata nei comuni fluidi

Pressione in un fluido in moto - pressione meccanica, termodinamica ed equilibrio locale

Per un fluido in quiete o comunque fluido perfetto (anche in moto) si era osservata e dimostrata l'isotropia della pressione, che coincideva con l'unica componente dello sforzo, una componente normale. Valutiamo lo sforzo normale quando si abbia un fluido viscoso e perciò

il tensore σ_{ij} completo: $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$

Lo sforzo normale alla superficie di normale \hat{n} posta in \vec{x} è

$$\sigma_n(\vec{x}) = \tau_i(\vec{x})n_i = \sigma_{ij}(\vec{x})n_j n_i = -p + \eta(\partial_j v_i + \partial_i v_j)n_i n_j - \frac{2}{3}\eta \operatorname{div}(\vec{v})n_i n_j + \zeta \operatorname{div}(\vec{v})n_i n_j$$

il termine $(\partial_j v_i + \partial_i v_j)$ è in generale non isotropo e cioè dipende dall'orientamento, a differenza delle altre parti di σ_n .

Possiamo fare una media dello sforzo normale σ_n su tutte le direzioni e chiamarla

PRESSIONE MECCANICA p_{mecc} :

$$p_{mecc}(\vec{x}) \equiv - \langle \sigma_{ij} n_i n_j \rangle = - \sigma_{ij} \langle n_i n_j \rangle = - \sigma_{ij} \frac{1}{3} \delta_{ij} = - \frac{1}{3} \sigma_{ii}$$

portando fuori σ_{ij} che non dipende da \hat{n}

Dunque in generale per un fluido (anche non newtoniano) in moto

$$p_{mecc} = - \frac{1}{3} \sigma_{ii} = - \frac{1}{3} (-p\delta_{ii} + \tau_{ii}) = p - \frac{1}{3} \tau_{ii}$$

è una p_{mecc} che non coincide con la p già intesa precedentemente come pressione termodinamica (punto delicato, che discutiamo tra poco).

Per un fluido newtoniano, esprimendo esplicitamente τ_{ii} :

$$p_{mecc}(\vec{x}) = - \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij} = - \frac{1}{3} \sigma_{ii} = - \frac{1}{3} \left[\eta(\underbrace{\partial_i v_i + \partial_i v_i}_{= \operatorname{div}(\vec{v})}) - \frac{2}{3} \operatorname{div}(\vec{v}) \underbrace{\delta_{ii}}_{= 3} + \zeta \operatorname{div}(\vec{v}) \underbrace{\delta_{ii}}_{= 3} - p\delta_{ii} \right] =$$

$$= p - \zeta \operatorname{div}(\vec{v})$$

$p_{mecc} = p - \zeta \operatorname{div}(\vec{v})$

Si pone la questione del poter definire le grandezze termodinamiche, come la pressione: infatti un fluido in moto non è in equilibrio meccanico, né tantomeno in equilibrio termodinamico. A ciò si ovvia con l'ipotesi di EQUILIBRIO LOCALE, accettabile quando il fluido non sia troppo lontano dall'equilibrio globale:

- il fluido è scomposto in elementi sufficientemente piccoli da poter assumere che ognuno sia in equilibrio al suo interno, e dunque che localmente vi si possano definire le grandezze termodinamiche con le loro relazioni differenziali che esprimono le equazioni di stato;
- per le grandezze non rigorosamente definibili, queste si possono dunque costruire a partire da quelle definite localmente e usando poi appunto le eq. di stato;
- le relazioni differenziali portate al finito tramite integrazione e legate con le grandezze tra i vari elementi del fluido non in equilibrio tra loro, esprimendo i gradienti delle grandezze stesse (cioè ovviamente le grandezze termodinamiche non sono costanti su tutto il fluido).

Per costruire le grandezze termodinamiche ne servono almeno due, e in effetti due sono comunque definibili.

① La densità di massa $\rho(\vec{x}) = 1/V(\vec{x})$ grandezza termodinamica sempre, anche localmente, definibile e misurabile.

② L'energia interna per udm \mathcal{E} ; questa non è direttamente misurabile, ma è comunque definibile a partire da un punto di vista microscopico.

Consideriamo l'elemento fluido come insieme di costituenti microscopici; la loro energia meccanica totale \bar{E}_T sarà

$$\bar{E}_T = \sum_r \frac{1}{2} m_r v_r^2 + \sum_r I_r \omega_r^2 + \sum_r U_r + \sum_{r,s} U_{rs} =$$

$$= \bar{E}_{KCM} + \bar{E}_{Krel} + U_{EXT} + U_{INT} \stackrel{\text{en. potenziale di interazione dei componenti (o gradi di libertà interni)}}{\leftarrow}$$

\nearrow en. cinetica del moto relativo dei costituenti rispetto al CM
 \nwarrow en. potenziale data da campi esterni

$$= (\bar{E}_{KCM} + U_{EXT}) + (\bar{E}_{Krel} + U_{INT})$$

en. cinetica + potenziale nei campi esterni

energia interna intesa come l'energia dei gradi di libertà interni: è proprio l'energia termodinamica \mathcal{E}

Definite ρ e \mathcal{E} due grandezze termodinamiche si possono costruire le altre localmente con le eq. di stato; in particolare si può ottenere $\rho(\vec{x})$, ρ termodinamica, che entra nella p meccanica del fluido in moto. Sinon che dunque la misura e il calcolo di una grandezza termodinamica possono non coincidere fuori equilibrio.

Flusso di quantità di moto - tensore densità di flusso di qdm

Come già fatto per il fluido perfetto, si può scrivere il tensore densità di flusso di qdm $\overline{\Pi}_{ij}$.

Si vede che ha esattamente la stessa struttura; laddove per il fluido perfetto si otteneva

$\overline{\Pi}_{ij} = p v_i v_j - p \delta_{ij}$, qui la parte che prima era di soli sforzi normali (p) va complementata con il resto degli sforzi (tangenziali), ovvero il tensore degli sforzi completo.

Infatti, ripartendo da

$$p \frac{Dv_i}{Dt} = \partial_j \sigma_{ij} + p \partial_i u$$

e poiché è anche $p \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} (p v_i) + \text{div} (p v_i \vec{v}) = \frac{\partial}{\partial t} (p v_i) + \partial_j (p v_i v_j)$

possiamo scrivere

$$\frac{\partial}{\partial t} (p v_i) = p \frac{Dv_i}{Dt} - \partial_j (p v_i v_j) = \partial_j \sigma_{ij} + p \partial_i u - \partial_j (p v_i v_j)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (p v_i) = \partial_j (\sigma_{ij} - p v_i v_j) + p \partial_i u$$

Integrando su di una regione R fissa

$$\int_R \frac{\partial}{\partial t} (p v_i) d^3x = \frac{d}{dt} \int_R p v_i d^3x = \frac{d}{dt} (qdm)_i = \int_R \partial_j (\sigma_{ij} - p v_i v_j) d^3x + \int_R p \partial_i u d^3x \quad \text{e al teorema della divergenza}$$

$$-\frac{d}{dt} (qdm)_i = \int_{\partial R} (p v_i v_j - \sigma_{ij}) n_j da - \int_R p \partial_i u d^3x$$

ovvero la diminuzione della qdm nella regione R è data da un contributo di forze di volume da campi esterni (il secondo termine) e da un flusso attraverso la sua frontiera ∂R ,

ovvero un flusso di qdm; perciò l'integranda è una densità di flusso di qdm

$$\left(\overline{\Pi}_{ij} = p v_i v_j - \sigma_{ij} \right)$$

Dissipazione nel fluido viscoso

La potenza elementare (cioè per udM e per una superficie da) erogata dalle forze di contatto si può scrivere come

$$\frac{1}{m} \vec{v} \cdot d\vec{F} = \frac{1}{m} v_i (\sigma_{ij} n_j da)$$

da cui per integrazione su tutta la superficie di frontiera ∂R di una regione R si ha

$$P_S = \int_{\partial R} \frac{1}{m} v_i \sigma_{ij} n_j da = \int_R \frac{1}{m} \partial_j (v_i \sigma_{ij}) d^3x \stackrel{\text{teorema della div}}{=} \frac{1}{\rho} \partial_j (v_i \sigma_{ij}) \quad P_S \text{ potenza per } udM \text{ erogata da forze di superficie}$$

approx su V piccolo

Inoltre dato un potenziale esterno u di forze di volume, questo eroga una potenza per udM

$$P' = - \frac{Du}{Dt} = - \frac{Du}{Dt} - \vec{v} \cdot \text{grad} u$$

$= \phi$, potenziale indipendente da t

Perciò scriviamo il bilancio energetico per l'unità di massa

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} v^2 + \epsilon \right) = \frac{1}{\rho} \partial_j (v_i \sigma_{ij}) - \frac{Du}{Dt}$$

$$\Rightarrow \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} v^2 + \epsilon + u \right) = \frac{1}{\rho} \partial_j (v_i \sigma_{ij}) = P_S$$

Scriviamo la variazione della sola en. meccanica

$$\frac{D}{Dt} \underbrace{\left(\frac{1}{2} v^2 + u \right)}_{E_m} = \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) + \frac{Du}{Dt} = \vec{v} \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt} + \frac{Du}{Dt} \quad \rightarrow \vec{v} \cdot \text{grad} u (= v_i \partial_i u)$$

$$\text{ma } \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f} \text{ forza di superficie per } udM = \frac{1}{\rho} \text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) - \text{grad} u \quad \left(f_i = \frac{1}{\rho} \partial_j \sigma_{ij} - \partial_i u \right)$$

$$\Rightarrow \vec{v} \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{v} \cdot \vec{f} = \frac{1}{\rho} \vec{v} \cdot \text{div} \underline{\underline{\sigma}} - \vec{v} \cdot \text{grad} u \quad \left(v_i \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{1}{\rho} v_i \partial_j \sigma_{ij} - v_i \partial_i u \right)$$

e inserendo nell'eq. di bilancio si ha l'eliminazione $-v_i \partial_i u + v_i \partial_i u \Rightarrow$

$$\frac{D}{Dt} \underbrace{\left(\frac{1}{2} v^2 + u \right)}_{E_m \text{ en. meccanica}} = \frac{1}{\rho} v_i \partial_j \sigma_{ij} = \frac{1}{\rho} \partial_j (v_i \sigma_{ij}) - \underbrace{\left(\frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \partial_j v_i \right)}_{P_D} \quad \rightarrow \frac{DE}{Dt} \text{ se si confronta con il bilancio di energia totale}$$

La variazione di energia è data da potenza erogata dalle forze di contatto e da un termine che è una dissipazione di energia cinetica; il fatto che è appunto $-\frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \partial_j v_i = \phi$ (perdita, dissipazione)

si vede facilmente almeno per un fluido incomprimibile:

