# Flusso di Poiseuille

Il flusso di Poiseuille e' un moto di fluido in una regione che e' delimitata da dei boundary fissi, fermi, e il moto e' causato da un gradiente di pressione. Vediamo un paio di esempi.

## Geometria piana

Ipotizziamo un flusso incomprimibile tra due piani indefinitamente estesi e paralleli al piano $xy$ ($z=0$), rispettivamente in $z=0$ e $z=h$. I piani sono fermi. Viene imposto un gradiente di pressione in direzione $\hat{e}_x$: $\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\Delta p}{\ell}$ (con $\ell$ lunghezza caratteristica).

Il problema presenta ~~dunque~~ un'invarianza in $y$ e anche in $x$ (visto che grad $p$ imposto costante lungo $\hat{e}_x$); cerchiamo una soluzione stazionaria per $\bar{v}$ che abbia le stesse proprietà di simmetria*, ovvero

$$\bar{v} = v_x(z)\hat{e}_x \qquad \text{che rispetti anche l'incomprimibilità: } \operatorname{div}\bar{v} = 0$$

La richiesta $\operatorname{div}(\bar{v}) = 0$ e' automaticamente soddisfatta dalla forma ipotizzata per $\bar{v}$.

Risolviamo il problema usando l'eq. di Navier-Stokes

$$\frac{D\bar{v}}{Dt} = \nu\nabla^2\bar{v} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p + \bar{g} \qquad (\bar{g} = -g\hat{e}_z \text{ gravità})$$

+ le b.c.

$$v_x(z=0) = 0 \qquad \text{(no-slip condition, nessuna vel. tg.ziale alla sup. di limite)}$$
$$v_x(z=h) = 0$$

La componente lungo $\hat{e}_x$ di N.-S. e'

$$\frac{Dv_x}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial v_x}{\partial t}}_{=0 \text{ per soluzione stazionaria}} + \cancel{\left(v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)} v_x = 0 = \nu\frac{d^2v_x}{dz^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dz^2}v_x(z) = \frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\eta}\frac{\Delta p}{\ell}$$

$$\rightsquigarrow \frac{dv_x}{dz} = -\frac{\Delta p}{\eta\ell}z + C_1 \rightsquigarrow v_x(z) = -\frac{\Delta p}{2\eta\ell}z^2 + C_1z + C_2$$

e si impongono le b.c.:

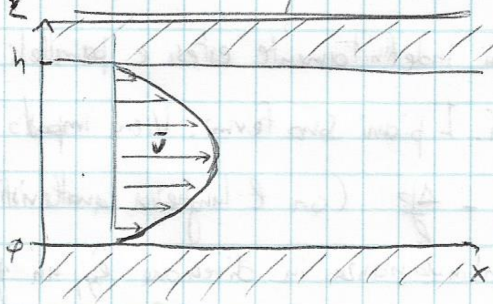
---

* = ricordiamo che e' una scelta: la soluzione NON e' unica, e si potrebbero trovare soluzioni turbolente che non rispettano affatto alcuna simmetria ne' sono stazionarie

$$v_x(\phi) = C_2 = \phi \Rightarrow C_2 = \phi$$

$$v_x(h) = -\frac{\Delta p}{2\eta\ell}h^2 + C_1 h = \phi \Rightarrow C_1 = \frac{\Delta p\, h}{2\eta\ell}$$

$$\Rightarrow v_x(z) = \frac{\Delta p}{2\eta\ell}(hz - z^2) \qquad \left( = \frac{\Delta p\, h^2}{2\eta\ell}(\tilde{z} - \tilde{z}^2) \quad \text{con } \tilde{z} \doteq z/h \text{ quota normalizzata} \right)$$



Note:

⊙ $$\operatorname{rot}\vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{e}_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{e}_y + \left(\cancel{\frac{\partial v_y}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial v_x}{\partial y}}\right)\hat{e}_z$$

$$= \frac{\partial v_x}{\partial z}\hat{e}_y = \frac{\Delta p}{2\eta\ell}(h - 2z) \neq \phi$$

$\operatorname{rot}\vec{v} \neq \phi$: anche se il campo di velocità è lungo $x$, tutti vettori paralleli, e $\Rightarrow$ non ci sono gorghi, c'è rotazione non nulla. La si visualizza facilmente se si poggia un bastoncino sulla superficie di un fiume: oltre a essere trascinato con la corrente (vel. media), esso ruota su se stesso.

⊙ La velocità massima è chiaramente al centro, la velocità media (con cui si può calcolare la portata moltiplicando per $\rho$ e la sezione trasversale) è

$$\tilde{v}_x = \frac{1}{h}\int_\phi^h v_x(z)\,dz = \frac{1}{h}\frac{\Delta p}{2\eta\ell}\left[\frac{hz^2}{2} - \frac{z^3}{3}\right]_\phi^h = \frac{1}{h}\frac{\Delta p}{2\eta\ell}\frac{3h^3 - 2h^3}{6} = \frac{\Delta p\, h^2}{12\eta\ell}$$

⊙ Il tensore degli sforzi $\sigma_{ij} = \eta(\partial_j v_i + \partial_i v_j) - p\delta_{ij}$ si può calcolare esplicitamente:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \phi \quad ; \text{ invece } \sigma_{zx} = \sigma_{xz} = \eta\frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\Delta p}{2\ell}(h - 2z) \neq \phi$$

e si può calcolare questo sforzo tangenziale (di attrito) sulle pareti fisse, per esempio su quella sottostante $\sigma_{zx} = \eta\left.\frac{\partial v_x}{\partial z}\right|_{z=\phi} = \frac{h\Delta p}{2\ell}$ ; sulla soprastante $(-)\sigma_{zx} = -\eta\left.\frac{\partial v_x}{\partial z}\right|_{z=h} = \frac{h\Delta p}{2\ell}$

(sforzo su faccia con normale $z$, diretto lungo $x$) (considerando normale lungo $-\hat{e}_z$)

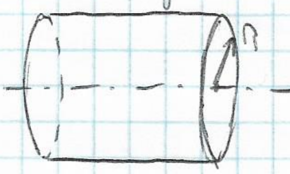
⊙ La componente lungo $\hat{e}_z$ di N.-S. $\frac{Dv_z}{Dt} = \phi = \nu\cancel{\nabla^2 v_z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g$

$\rightsquigarrow \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \rightsquigarrow$ $\underline{p + \rho g z = \text{costante}}$ si riduce alla legge di Stevino

(l'invarianza in $y$ invece equivale a $v_y = \phi$ o comunque valore uniforme, non interessante)

Geometria cilindrica - flusso in conduttura

Consideriamo un flusso viscoso, incomprimibile e stazionario lungo l'asse di un tubo di raggio R, dato da gradiente longitudinale di pressione $\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\Delta p}{\ell}$ costante. Valgono le stesse considerazioni di simmetria del problema già esposte per il caso piano; qui si vede un'invarianza per rotazioni e per traslazioni lungo z, $\Rightarrow$ cerchiamo una soluzione stazionaria del tipo




$\bar{v} = v_z(r)\hat{e}_z$ la quale già verifica il requisito di incomprimibilità $\operatorname{div}\bar{v} = 0$.

L'eq. di N.-S. va corredata della b.c. sulla parete del tubo: $v_z(R) = 0$.

Poiché $\frac{Dv_z}{Dt} = \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial t}} + (\bar{v}\cdot\text{grad})\, v_z = \cancel{v_r}\frac{\partial v_z}{\partial r} + \cancel{\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}} + \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial z}} = 0$,

la componente z dell'eq. di N.-S. si riduce a

$$\nu\nabla^2 v_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad \leadsto \quad \nabla^2 v_z = -\frac{\Delta p}{\eta\ell}$$

Esplicitamente in coordinate cilindriche

$$\nabla^2 v_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right) = -\frac{\Delta p}{\eta\ell}$$

$$\leadsto \frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right) = -\frac{\Delta p}{\eta\ell} r \quad \leadsto \quad r\frac{dv_z}{dr} = -\frac{\Delta p}{2\eta\ell} r^2 + C_1 \quad \leadsto \quad \frac{dv_z}{dr} = -\frac{\Delta p}{2\eta\ell} r + \frac{C_1}{r}$$

e infine $v_z(r) = -\frac{\Delta p}{4\eta\ell} r^2 + C_1 \log r + C_2$

Per finitezza di $v_z$ in $r=0$ è necessario che sia $\boxed{C_1 = 0}$; la b.c. $v_z(R) = 0$ inoltre impone che $v_z(R) = -\frac{\Delta p}{4\eta\ell}R^2 + C_2 = 0 \Rightarrow \boxed{C_2 = \frac{\Delta p}{4\eta\ell}R^2}$

$$\Rightarrow v_z(r) = \frac{\Delta p}{4\eta\ell}\left(R^2 - r^2\right) \qquad \left( = \frac{\Delta p R^2}{4\eta\ell}\left(1 - \tilde{r}^2\right) \text{ con } \tilde{r} = r/R \text{ raggio normalizzato} \right)$$

di nuovo profilo parabolico di velocità con massimo al centro e v media $\tilde{v}_z$ data da

$$\tilde{v}_z = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R v_z(r)\, 2\pi r\, dr = \frac{\Delta p}{2\eta\ell R^2}\int_0^R \left(R^2 r - r^3\right) dr = \frac{\Delta p}{2\eta\ell R^2}\left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right) = \frac{\Delta p R^2}{8\eta\ell}$$

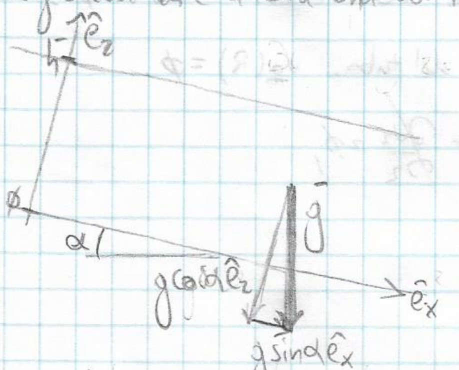
e portata $\dot{m} = \rho\pi R^2\tilde{v}_z$

Lo sforzo tangenziale sulla parete è $\sigma_{rz} = -\eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \cancel{\frac{\partial v_r}{\partial z}}\right)\Big|_{r=R} = -\eta\frac{\partial v_z}{\partial r}\Big|_{r=R} = \frac{\Delta p R}{2\eta\ell}$

(considerando la normale lungo $-\hat{e}_r$)

Fluido lungo un piano inclinato

In questo caso si ha uno strato di fluido reale di altezza $h$; come sempre, si tratta di un flusso incomprimibile in regime stazionario. Il fluido scorre lungo un piano inclinato di un angolo $\alpha$ rispetto all'orizzontale — e dunque il "motore" e' una componente della gravita' lungo il piano inclinato. Consideriamo SdR con $\hat{e}_x$ lungo il piano inclinato, $\hat{e}_z$ nella direzione dello spessore dello strato, e ipotizziamo ragionevolmente ancora una volta una soluzione invariante in $x$ e $z$ del tipo



$$\vec{v} = v_x(z)\,\hat{e}_x$$

corredata dalle due b.c.:

⊙ in $z=\phi$ (fondo solido)

$$v_x(\phi)=\phi$$

⊙ in $z=h$ abbiamo un pelo libero (il fluido soprastante e' aria, di densita' trascurabile); la pressione sara' quella atmosferica $p_0$, ovvero per continuita' dello sforzo normale

$$\sigma_{zz} = -p = -p_0$$

mentre non ci deve essere attrito ovvero sforzo di taglio

$$\sigma_{zx} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z}\Big|_{z=h} = \phi$$

⊛ La componente lungo $\hat{e}_z$ dell'eq. di Navier-Stokes e'

$$\underbrace{\frac{Dv_z}{Dt}}_{\phi \text{ perche' } v_z=\phi} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \underbrace{\nabla^2 v_z}_{\phi} - g\cos\alpha \quad \rightsquigarrow \quad p(z) = -\rho g\cos\alpha\, z + C \;;$$

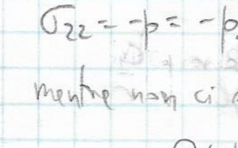
con la b.c. $p(h) = -\rho g\cos\alpha\, h + C = p_0$

$$p(z) = p_0 + \rho g\cos\alpha\,(h-z)$$

⊛ La componente lungo $\hat{e}_x$ di N.-S. e'

$$\frac{Dv_x}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\nabla^2 v_x + g\sin\alpha \rightsquigarrow \nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = -g\sin\alpha \rightsquigarrow v_x(z) = -\frac{g\sin\alpha}{2\nu}z^2 + D_1 z + D_2$$

nulle tutte le derivate



con b.c. $v_x(\phi) = D_2 = \phi$ ; $\frac{\partial v_x}{\partial z}\Big|_{z=\phi} = -\frac{g\sin\alpha}{\nu}h + D_1 = \phi$

$$\Rightarrow v_x(z) = \frac{g\sin\alpha}{2\nu}(2hz - z^2)$$

$\sigma_{zx} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z}\Big|_{z=\phi} = g\sin\alpha\, h/\nu$ sul fondo

Flusso di Couette

Nel flusso di Couette, il moto del fluido è causato non da un gradiente di pressione applicato (come per il flusso di Poiseuille), bensì dal moto relativo delle pareti che delimitano il flusso.

Geometria piana

Ipotizziamo un flusso incomprimibile tra due piani indefinitamente estesi $z=0$ e $z=h$. Le condizioni al contorno sono pareti inferiore ferma e parete superiore con velocità costante $\bar{v}=u\hat{e}_x$. Ancora una volta cerchiamo una soluzione stazionaria e che rispecchi le simmetrie del sistema (invariante per traslazioni in x e y): $\bar{v}=v_x(z)\hat{e}_x$ (che soddisfa peraltro l'incomprimibilità, $div(\bar{v})=0$).

Usando questa forma nella componente x dell'eq. di N.-S. si ha

$$\frac{Dv_x}{Dt}=0=\nu\nabla^2 v_x-\frac{1}{\rho}\underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{\to 0}$$

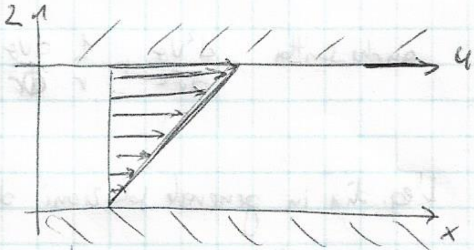
$\to 0$, nessun gradiente di p imposto, solo var. in z per gravità (Stevino)

$$\Rightarrow \frac{d^2 v_x}{dz^2}=0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dv_x}{dz}=C_1 \quad \rightsquigarrow \quad v_x(z)=C_1 z+C_2$$

$$+ \text{b.c.} \quad v_x(z=0)=0 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{C_2=0}$$

$$v_x(z=h)=u \quad \rightsquigarrow \quad C_1 h=u \Rightarrow C_1=u/h$$

$$\Rightarrow \quad v_x(z)=u\frac{z}{h} \quad \text{profilo lineare}$$




Il tensore degli sforzi $\sigma_{ij}=\eta(\partial_j v_i+\partial_i v_j)-p\delta_{ij}$ calcolato esplicitamente dà

$$\underline{\underline{\sigma}}=\begin{pmatrix}-p & 0 & \eta u/h\\ 0 & -p & 0\\ \eta u/h & 0 & -p\end{pmatrix}$$

La vorticità è non nulla, $\text{rot}\,\bar{v}=\frac{\partial v_x}{\partial z}\hat{e}_y=\frac{u}{h}\hat{e}_y$.

Geometria cilindrica

Qui il flusso incomprimibile avviene tra due cilindri coassiali di raggio $R_1$, $R_2$ e velocità angolare $\Omega_1$, $\Omega_2$, nonché lunghezza $\infty$; si cerca soluzione con le stesse invarianze del problema (in $z$ e $\vartheta$),

$\Rightarrow \quad \bar{v} = v_\vartheta(r)\,\hat{e}_\vartheta \qquad$ (per la quale $\operatorname{div}(\bar{v}) = \phi$).

La componente radiale dell'eq. di N.-S. è

$$\underbrace{\cancel{\frac{\partial v_r}{\partial t}}}_{\substack{\text{(stazionaria,}\\ \text{e } v_r = \phi)}} + \underbrace{\left[(\bar{v}\cdot\operatorname{grad})\bar{v}\right]_r}_{v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = \phi} - \frac{v_\vartheta^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left[\cancel{\nabla^2 v_r} - \cancel{\frac{2}{r}\frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta}} - \cancel{\frac{v_r}{r^2}}\right]$$

e cioè si ottiene $\quad \dfrac{v_\vartheta^2}{r} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial r}$, equazione che ci dà conto del fatto che $v_\vartheta^2/r$ è un'accelerazione centripeta, responsabile della traiettoria curva dell'elemento fluido (poi $p(r)$ si può ottenere per integrazione, una volta trovata $v_\vartheta(r)$).

La componente in $\vartheta$ dell'eq. di N.-S. è

$$\underbrace{\cancel{\frac{\partial v_\vartheta}{\partial t}}}_{\text{(stazionaria)}} + \overbrace{(\bar{v}\cdot\operatorname{grad})v_\vartheta}^{\frac{v_\vartheta}{r}\cancel{\frac{\partial}{\partial\vartheta}} v_\vartheta} + \cancel{\frac{v_r v_\vartheta}{r}} = \cancel{-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \vartheta}} + \nu\left[\nabla^2 v_\vartheta + \cancel{\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \vartheta}} - \frac{v_\vartheta}{r^2}\right]$$

per $\vartheta$-invarianza non c'è gradiente di $p$ in $\vartheta$

e cioè si ottiene

$$\nabla^2 v_\vartheta - \frac{v_\vartheta}{r^2} = \phi \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_\vartheta}{dr}\right) - \frac{v_\vartheta}{r^2} = \phi$$

anche scritta $\quad \dfrac{d^2 v_\vartheta}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{dv_\vartheta}{dr} - \dfrac{v_\vartheta}{r^2} = \phi \quad$ ovvero $\quad \boxed{r^2\dfrac{d^2 v_\vartheta}{dr^2} + r\dfrac{dv_\vartheta}{dr} - v_\vartheta = \phi}$ eq. di Cauchy-Eulero

L'eq. ha in generale soluzioni del tipo $\sim r^n$ e sostituendo $r^n$ in questa specifica forma si ottiene

$$n(n-1)r^n + nr^n - r^n = n(n-1)r^n + (n-1)r^n = (n+1)(n-1)r^n = (n^2-1)r^n = \phi$$

verificata $\Leftrightarrow$ $n = \pm 1$

da cui $\quad v_\vartheta(r) = ar + b/r$

Si impongono dunque le b.c.: $\quad v_\vartheta(R_1) = aR_1 + b/R_1 = \Omega_1 R_1 \quad (1)$

$\qquad v_\vartheta(R_2) = aR_2 + b/R_2 = \Omega_2 R_2 \quad (2)$

Da $R_2\cdot(2) - R_1\cdot(1)$ si elimina $b$ e si ottiene $\quad a(R_2^2 - R_1^2) = \Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

Da (1)/$R_1$ − (2)/$R_2$ si elimina $a$ e si ottiene

$$b\left(\frac{1}{R_1^2}-\frac{1}{R_2^2}\right) = \Omega_1-\Omega_2 \Rightarrow b = \frac{(\Omega_1-\Omega_2)R_1^2R_2^2}{R_2^2-R_1^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_\vartheta(r) = \frac{\Omega_2R_2^2-\Omega_1R_1^2}{R_2^2-R_1^2}\,r + \frac{(\Omega_1-\Omega_2)R_1^2R_2^2}{R_2^2-R_1^2}\,\frac{1}{r}}$$

Alla parete in $R_1$ e $R_2$ è esercitato un momento torcente (i due momenti saranno uguali e opposti, $\tau_1 = -\tau_2$). Usando il tensore degli sforzi, abbiamo

$$\sigma_{r\vartheta}\Big|_{r=R_2}\cdot R_2 = \text{momento torcente per unità di superficie esercitato dal cilindro in } R_2$$

$$= \eta\left[\frac{1}{r}\cancel{\frac{\partial v_r}{\partial\vartheta}}+\frac{\partial v_\vartheta}{\partial r}-\frac{v_\vartheta}{r}\right]\Bigg|_{r=R_2} R_2 = \qquad \text{con } v_\vartheta = ar+b/r$$

$$= \eta\left[a-\frac{b}{r^2}-a-\frac{b}{r^2}\right]\Bigg|_{r=R_2} R_2 = -2\eta\frac{b}{R_2} = -\frac{2\eta(\Omega_1-\Omega_2)R_1^2R_2}{R_2^2-R_1^2}$$

e moltiplicando per $2\pi R_2$ si ottiene il momento torcente per unità di lunghezza del cilindro

$$\tau_2 = \frac{-4\pi\eta(\Omega_1-\Omega_2)R_1^2R_2^2}{R_2^2-R_1^2} \qquad (\text{positivo se } \Omega_2>\Omega_1)$$

Un apparato così congegnato è sfruttabile come <u>viscosimetro</u>: per esempio impostando $\Omega_2\neq\phi$, e misurando il momento torcente $\tau_{1}$ $(=-\tau_{1,cyl}=\tau_2)$ da applicare al cilindro interno perché resti fermo ($\Omega_1=\phi$) si ottiene il coefficiente di viscosità $\eta$ (VISCOSIMETRO DI COUETTE).