Leggi di similarità e numeri adimensionati

Sotto quali condizioni un esperimento in laboratorio è rappresentativo di un fenomeno, naturale o artificiale che sia, ma che si svolge su altre scale (spaziali e temporali, per fare gli esempi più diretti)? In altre parole, come si può costruire un modello che descriva correttamente la fisica di nostro interesse?

Ciò si può fare grazie al concetto di similitudine e alla tecnica di adimensionalizzazione delle equazioni della dinamica. Con questo metodo si ricavano dei numeri adimensionati che contengono l'informazione fisica fondamentale del sistema in esame, e si può anche stabilire una gerarchia tra i termini che compongono le eq. della dinamica (così da poterle eventualmente semplificare, eliminando i termini trascurabili).

Definiamo nel seguito vari tipi di similitudine e giungiamo alla forma adimensionata dell'eq. di Navier-Stokes, nel caso stazionario e poi in quello dipendente dal tempo.

⊙ Similitudine geometrica

Due flussi sono geometricamente simili se i domini entro cui essi hanno luogo, e quindi nello specifico le frontiere che li definiscono delimitandoli, si trasformano l'uno nell'altro attraverso trasformazioni euclidee, ovvero

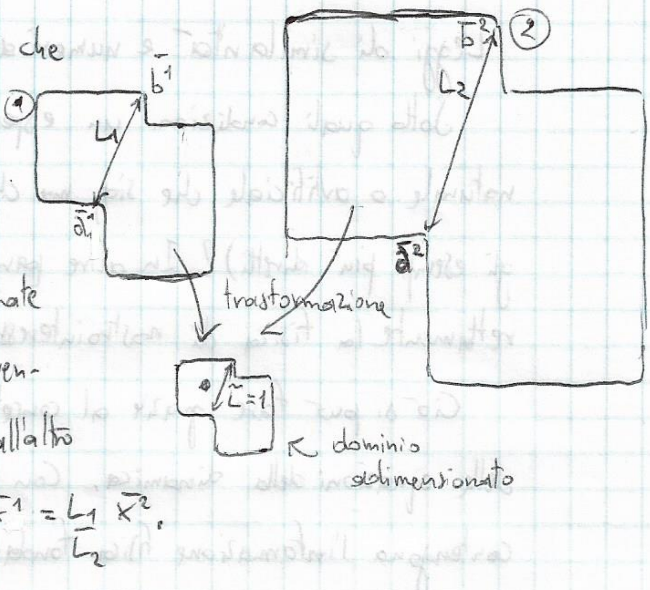
- rototraslazioni rigide;
- dilatazioni isotrope (ovvero appunto le trasformazioni di similitudine).

Sorvolando sulla prima categoria, che al netto di un'eventuale direzione preferenziale (dettata, per esempio dalla gravità), non è particolarmente interessante, ci concentriamo su dilatazioni/contrazioni isotrope, che preservano la forma (gli angoli) delle figure geometriche.

Prendiamo dunque una coppia di pt di coordinate $\bar{a}^1, \bar{b}^1$ nel flusso 1 a distanza L_1; la coppia è scelta opportunamente, per es. due pt della frontiera con una distanza L_1 caratteristica (maggiormente indicativa di una dimensione tipica del dominio);

si consideri poi la coppia $\bar{a}^2, \bar{b}^2$ a distanza L_2 nel flusso due, coppia corrispondente alla coppia 1 per similitudine geometrica (cfr. disegno), si hanno trasformazioni di similitudine per i pt $\bar{x}^1$ e $\bar{x}^2$ dei flussi 1 e 2 rispettivamente tali che

$$\frac{1}{L_1}\bar{x}^1 = \tilde{x}^1 = \frac{1}{L_2}\bar{x}^2$$



ovvero pt corrispondenti nei due domini vengono trasformati nello stesso pt $\tilde{x}^1$ di un dominio di coordinate adimensionate. Si noti in particolare che le frontiere diventano la stessa frontiera, e che il passaggio da un flusso all'altro per i pt da $\bar{x}^2$ a $\bar{x}^1$ è, secondo la trasformazione, $\bar{x}^1 = \frac{L_1}{L_2}\bar{x}^2$.

⊙ Similitudine cinematica

Due <u>flussi</u> sono <u>cinematicamente simili</u> se

a) sono geometricamente simili, quindi i pt corrispondenti geometricamente $\bar{x}^1$, $\bar{x}^2$ rispettano la trasformazione $\bar{x}^1/L_1 = \bar{x}^2/L_2 = \tilde{x}^1$;

b) le velocità $\bar{v}^1(\bar{x}^1)$, $\bar{v}^2(\bar{x}^2)$ osservate nei pt geometricamente simili rispettano una proporzionalità a loro volta, $\bar{v}^1(\bar{x}^1) = a\,\bar{v}^2(\bar{x}^2)$.

Questa relazione si può riscrivere considerando due pt (scelti, al solito, in quanto rappresentativi) $\bar{a}^1$, $\bar{a}^2$ le cui velocità hanno modulo U_1, U_2 rispettivamente:

$$U_1 = |\bar{v}^1(\bar{a}^1)| \quad ; \quad U_2 = |\bar{v}^2(\bar{a}^2)| .$$

Allora la velocità del pt $\bar{x}^2$ nel flusso 2 si trasforma nella velocità del pt $\bar{x}^1$ geometricamente simile nel flusso 1 con la legge di trasformazione

$$\bar{v}^1(\bar{x}^1) = \frac{U_1}{U_2}\bar{v}^2(\bar{x}^2) = \frac{U_1}{U_2}\bar{v}^2\left(\frac{L_1}{L_2}\bar{x}^1\right).$$

I due flussi sono ricondotti a uno stesso flusso adimensionato (cioè con velocità $\tilde{v}^1$ adimensionata e coordinate $\tilde{x}^1$ adimensionate)

$$\tilde{v}^1(\tilde{x}^1) = \frac{1}{U_1}\bar{v}^1(\underbrace{L_1\tilde{x}^1}_{\bar{x}^1}) = \frac{1}{U_2}\bar{v}^2(\underbrace{L_2\tilde{x}^1}_{\bar{x}^2}).$$

⊙ Problemi simili

Due problemi sono simili se

a) sono geometricamente simili;

b) sono cinematicamente simili sulle frontiere ($\frac{\bar{v}^1(\bar{x}^1)}{U_1} = \frac{\bar{v}^2(\bar{x}^2)}{U_2}$ e' richiesto solo sul bordo del dominio)

e dunque vengono ricondotti allo stesso problema (sia come dominio che come condizioni al contorno, che sono poi le velocità sulla frontiera) una volta che si sia passati a coordinate e velocità adimensionate.

Le condizioni imposte per i problemi simili sono sufficienti a riconoscerli come flussi cinematicamente simili? Lo si può affermare quando sia verificato che essi sono dinamicamente simili.

⊙ Problemi dinamicamente simili

Il concetto di similitudine dinamica si esplicita (e risulta in tutta la sua chiarezza e importanza) con un processo di adimensionalizzazione delle variabili dinamiche. Prendiamo un problema ① per il quale si voglia risolvere l'eq. di Navier-Stokes, che inizialmente consideriamo in un caso stazionario e in assenza di forze esterne. Per adimensionare (normalizzare) le variabili scegliamo opportuni valori di lunghezza L_1 (una lunghezza caratteristica, per es. il diametro del tubo in cui si ha flusso o una particolare distanza tra pt significativi della frontiera) e di velocità U_1 (velocità caratteristica quale può essere la $\bar{v}$ di un corpo in moto, la $\bar{v}$ della portata media in un condotto). Si possono scrivere variabili adimensionate

$$\bar{x}' = \frac{1}{L_1}\bar{x}$$

$$\bar{v}' = \frac{1}{U_1}\bar{v}^1(L_1\bar{x}')$$

(ρ_1, ν_1 sono dati del problema ①)

$$p' = \frac{1}{\rho_1 U_1^2}\, p^1(L_1\bar{x}')$$

per l'eq. stazionaria di N.-S. con le sue b.c.:

$$\begin{cases} (\bar{v}(\bar{x})\cdot \text{grad})\,\bar{v}(\bar{x}) = -\frac{1}{\rho_1}\,\text{grad}\, p(\bar{x}) + \nu_1 \nabla^2 \bar{v}(\bar{x}) \\ \bar{v}(\bar{x})\big|_{S^1} = \bar{v}_0^1(\bar{x}) \end{cases}$$

b.c.: $\bar{v}_0^1(\bar{x})$ campo di velocità assegnato $\forall \bar{x} \in S^1 = \partial R^1$ frontiera del dominio R^1

Inserendo in N.-S. le variabili adimensionate si ha *

$$\left[U_1 \bar{v}' \cdot \left(\frac{1}{L_1} \text{grad}'\right)\right] U_1 \bar{v}'(\bar{x}') = -\frac{1}{\rho_1} \frac{1}{L_1} \text{grad}'\left(\rho_1 U_1^2 p'\right) + \nu_1 \frac{1}{L_1^2} \nabla'^2 \left(U_1 \bar{v}'(\bar{x}')\right)$$

$$\rightsquigarrow \frac{U_1^2}{L_1} \bar{v}' \cdot \text{grad}' \bar{v}'(\bar{x}') = -\frac{U_1^2}{L_1} \text{grad}' p'(\bar{x}') + \frac{\nu_1 U_1}{L_1^2} \nabla'^2 \bar{v}'(\bar{x}')$$ e dividendo per U_1^2/L_1

$$\rightarrow \bar{v}' \cdot \text{grad}' \bar{v}'(\bar{x}') = -\text{grad}' p'(\bar{x}') + \frac{\nu_1}{U_1 L_1} \nabla'^2 \bar{v}'(\bar{x}') ;$$

con la definizione $\boxed{Re \doteq UL/\nu = \rho UL/\eta}$ numero di Reynolds (quantità adimensionata)

e adimensionando la b.c. $\cancel{U_1} \bar{v}'(\bar{x}')\Big|_{S'} = \cancel{U_1} \bar{v}_0'(\bar{x}')$ con $S' = S_1/L_1$ frontiera adimensionata

si giunge al problema

$$\begin{cases} \bar{v}'(\bar{x}') \cdot \text{grad}' \bar{v}'(\bar{x}') = -\text{grad}' p'(\bar{x}') + \dfrac{1}{Re_1} \nabla'^2 \bar{v}'(\bar{x}') & \text{eq. di N.-S. adimensionata} \\ \bar{v}'(\bar{x}')\Big|_{S'} = \bar{v}_0'(\bar{x}') & \text{b.c.} \end{cases}$$

Osservando questa coppia di equazioni, diviene chiaro l'intento: preso un secondo problema 2 lo si riscali utilizzando grandezze tipiche L_2, U_2 in punti che sono corrispondenti per similitudine geometrica a quelli utilizzati per identificare L_1, U_1 nel problema 1; quindi

a) si ottiene un'eq. di N.-S. adimensionata con identica condizione al contorno se
- c'è similitudine geometrica (= stessa frontiera adimensionata)
- c'è similitudine cinematica sulla frontiera

ovvero si hanno problemi simili;

b) si ottiene la stessa eq. di N.-S., con la stessa b.c. (pt a)), e quindi la stessa soluzione per i problemi 1 e 2, se $\boxed{Re_1 = Re_2}$ ⇒ si osserva come le grandezze tipiche dipendano solo da Re. I problemi si possono quindi definire dinamicamente simili, e la similitudine cinematica è valida su tutto il dominio, oltre che sulla frontiera.

$* \doteq \text{grad}' = \frac{1}{L_1}\text{grad}, \quad \nabla'^2 = \frac{1}{L_1^2}\nabla^2$ in quanto $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial (L_1 x')} = \frac{1}{L_1}\frac{\partial}{\partial x'}$

Quindi in pratica tutti i problemi dinamicamente simili, con stesso numero di Reynolds, sono risolti dallo stesso modello; le grandezze dimensionate, reali e specifiche di un problema si ottengono dalle grandezze adimensionate invertendo il riscalamento, che sono funzioni di Re:

$$\bar{v}(\bar{x}) = U\bar{v}'\left(\bar{x}/L, Re\right) \quad \text{da} \quad \bar{v}' = \bar{v}'(\bar{x}', Re)$$

$$p(\bar{x}) = \rho U^2 p'\left(\bar{x}/L, Re\right) \quad \text{da} \quad p' = p'(\bar{x}', Re)$$

e così per tutte le grandezze ottenibili a partire dalle variabili dinamiche (per es., detta F forza di resistenza, sarà $F = \rho U^2 A F'(Re)$ con A sup. caratteristica).

Numero di Froude (N.-S. in campo gravitazionale)

Inseriamo nell'eq. di N.-S. un campo esterno, nello specifico quello gravitazionale; al secondo membro compare il termine $\bar{g} = -g\hat{e}_z$, e adimensionando, ovvero dividendo per U^2/L (che non a caso è dimensionalmente un'accelerazione o forza per udM) si ha il termine $-gL/U^2\,\hat{e}_z$; definiamo $\boxed{Fr \doteq U/\sqrt{gL}}$ numero di Froude

e riscriviamo la forma adimensionata di N.-S. come

$$(\bar{v}'\cdot \text{grad}')\bar{v}' = -\text{grad}'p' + \frac{1}{Re}\nabla'^2\bar{v}' - \frac{1}{Fr^2}\hat{e}_z .$$

Dunque in questo caso la similitudine dinamica è assicurata quando i diversi problemi in esame abbiano uguale Re e uguale Fr.

Numero di Strouhal (N.-S. dipendente dal tempo)

Nel risolvere un problema non stazionario, sono possibili due casi.

a) Non esiste un tempo proprio, una scala temporale caratteristica identificabile senza far ricorso ad altre variabili. Dunque si deve considerare un tempo costruito a partire dalle grandezze tipiche di lunghezza e velocità del problema, L e U e il tempo tipico τ sarà proprio quello che indica la distanza tipica percorsa a velocità tipica: $\tau = L/U$. Adimensionando al solito

$$\bar{x}' = \frac{1}{L}\bar{x}\,; \quad \bar{v}'(\bar{x}') = \frac{1}{U}\bar{v}(L\bar{x}')\,; \quad p'(\bar{x}') = \frac{1}{\rho U}p(\bar{x}')\,; \quad t' = \frac{1}{\tau}t = \frac{U}{L}t$$

il termine in più in N.-S., quello di derivata temporale, è

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \frac{U}{L}\frac{\partial}{\partial t'}(U\bar{v}') = \frac{U^2}{L}\frac{\partial \bar{v}'}{\partial t'}$$

e nel dividere tutti i membri per il solito coefficiente U^2/L si ha

$$\underline{\frac{\partial \bar{v}'}{\partial t'} + (\bar{v}'\cdot \mathrm{grad}')\bar{v}' = -\mathrm{grad}'p' + \frac{1}{Re}\nabla'^2\bar{v}' \left(+\frac{1}{Fr^2}\hat{e}_z\right)}$$

ovvero, non avendo introdotto alcuna nuova grandezza caratteristica del flusso, la descrizione rimane completamente contenuta nei numeri adimensionati già trovati (Re, Fr).

(b) Esiste un tempo proprio τ (per es. il periodo di un moto oscillatorio, o un tempo di smorzamento), perciò si riscala il tempo t usando questo τ:

$$t' = \frac{1}{\tau}t$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \frac{1}{\tau}\frac{\partial}{\partial t'}U\bar{v}' = \frac{U}{\tau}\frac{\partial \bar{v}'}{\partial t'}$$ e dividendo l'eq. di N.-S. per U^2/L si ha

$$\frac{L}{U\tau}\frac{\partial \bar{v}'}{\partial t'} + (\bar{v}'\cdot \mathrm{grad}')\bar{v}' = -\mathrm{grad}'p' + \frac{1}{Re}\nabla'^2\bar{v}' \quad ;$$

definiamo perciò un nuovo numero adimensionato $\boxed{Sr \doteq \frac{L}{U\tau}}$ <u>numero di Strouhal</u>

da cui $$Sr\frac{\partial \bar{v}'}{\partial t'} + (\bar{v}'\cdot \mathrm{grad}')\bar{v}' = -\mathrm{grad}'p' + \frac{1}{Re}\nabla'^2\bar{v}' + \frac{1}{Fr^2}\hat{e}_z$$

da cui abbiamo similitudine dinamica per uguali valori di Re, Fr, Sr in problemi diversi.

Uso dei numeri adimensionati nel confronto tra i termini di N.-S.

Il riscalamento con opportune quantità U, L permette un diretto confronto tra il termine di accelerazione convettiva $(\bar{v}\cdot\mathrm{grad})\bar{v}$ e il termine viscoso $\nu\nabla^2\bar{v}$; infatti col riscalamento velocità e sue derivate diventano di ordine 1 e il rapporto tra i due termini è

$$\frac{\text{termine convettivo}}{\text{termine viscoso}} = \frac{|(\bar{v}'\cdot\mathrm{grad}')\bar{v}'|}{\frac{1}{Re}|\nabla'^2\bar{v}'|} = Re$$

Detto in altre parole, ma del tutto equivalentemente, che i due termini siano confrontabili (stesso ordine) è scrivibile per grandezze reali (dimensionate) come

$$(\bar{v}\cdot\mathrm{grad})\bar{v} \sim \nu\nabla^2\bar{v}$$ e usando le L, U caratteristiche

$$U\bar{v}'\frac{1}{L}U v' = \frac{U^2}{L}v'^2 \sim \nu\frac{1}{L^2}Uv' \quad \rightsquigarrow$$

$$v'^2 \sim \frac{\nu}{UL} v' \quad \rightarrow \quad Re = \frac{UL}{\nu} \sim 1$$

(~ 1) $\qquad$ (~ 1)

Quando $Re \sim 1$ i due termini sono confrontabili, nessuno dei due è trascurabile.

⊛ Nel limite di $Re \gg 1$, invece, il termine viscoso è trascurabile rispetto a quello inerziale, e l'eq. di N.-S. si riduce all'eq. di Eulero, logicamente, in quanto l'effetto della viscosità è ignorabile. Attenzione però al fatto che ciò sarà accettabile "in campo aperto", lontano da frontiere solide o corpi immersi; nelle vicinanze di questi la componente tangenziale della velocità del fluido ha forti gradienti (deve andare a zero su parete) e le derivate seconde (presenti nel termine viscoso $\nu \nabla^2 \vec{v}$) saranno molto grandi e non più trascurabili. Per l'ennesima volta, vale il ragionamento per cui lontano dai boundary il flusso è non di rado trattabile come ideale, mentre gli effetti della viscosità (non idealità) sono perlopiù confinati allo strato limite.

⊛ Nel caso in cui non valga $Re \gg 1$, può comunque accadere di poter considerare una situazione locale non coincidente con quella globale. Laddove il numero di Reynolds "globale" sia stato definito utilizzando una scala di lunghezza L, può infatti capitare di voler valutare il flusso in una regione, per esempio, a distanza grande D da un eventuale ostacolo (corpo immerso), distanza su cui si osservano le variazioni significative di velocità.

Se $D > L$ (L potrebbe essere il diametro del corpo immerso, che impone la lunghezza tipica su cui è necessario studiare il flusso nella sua interezza, senza trascurare cioè i dettagli anche in prossimità del corpo) $\Rightarrow$ definiamo un numero di Reynold locale

$$Re_D = \frac{\rho U D}{\eta} > Re_{globale} = \frac{\rho U L}{\eta}$$

e dunque localmente lontano dai corpi si può avere $Re_D \gg 1$ (a fronte di Re globale magari non piccolo ma nemmeno molto grande) e trascurare il termine viscoso, così da trattare il flusso come ideale.

⊛ Il limite opposto è quello per cui $Re \ll 1$ ($Re \rightarrow \phi$) e fisicamente corrisponde a un caso dominato dalla viscosità a scapito di un termine inerziale, convettivo che è trascurabile;

eliminando tale termine (nonlineare in $\bar{v}$!) dall'eq. di N.-S. si ottiene l'eq. lineare

$$\boxed{\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\,\mathrm{grad}\,p + \eta \nabla^2 \bar{v}}$$

detta anche problema di Stokes, che nel caso stazionario è ridotta a

$$\eta \nabla^2 \bar{v} = \mathrm{grad}\,p$$ o, applicando il rotore a entrambi i membri;

$$\nabla^2 (\mathrm{rot}\,\bar{v}) = \phi$$

Questa approssimazione è sperimentalmente verificata come del tutto accettabile nel caso del moto di una sfera nel fluido (o viceversa) per $Re < 0.1$, usando il diametro della sfera nella definizione di Re; è ancora un'approssimazione decente fino a $Re < 0.8$.

⊛ Come per Re, il significato del numero di Froude appare evidente dal confronto tra il termine convettivo e quello gravitazionale in cui Fr appare:

$$\underbrace{(\bar{v}\cdot\mathrm{grad})\,\bar{v}}_{\frac{U^2}{L}\tilde{v}'} \sim \bar{g}$$

$$\frac{U^2}{L}\underbrace{\tilde{v}'}_{\text{ordine } 1} \sim g \quad \rightsquigarrow \quad \frac{U^2}{gL} = Fr^2 \sim 1 \quad \text{se termini confrontabili}$$

ovvero $Fr = \left(\dfrac{\text{accelerazione convettiva}}{\text{accelerazione gravitazionale}}\right)^{\frac{1}{2}}$

⊛ Considerazioni del tutto analoghe valgono per il numero di Strouhal, che confronta il termine convettivo con quello di moto proprio (oscillazione di moto periodico, per es.):

$$Sr = \frac{\text{accelerazione di moto proprio}}{\text{accelerazione convettiva}} \left(= \frac{|\partial\bar{v}/\partial t|}{(\bar{v}\cdot\mathrm{grad})\,\bar{v}} \right)$$