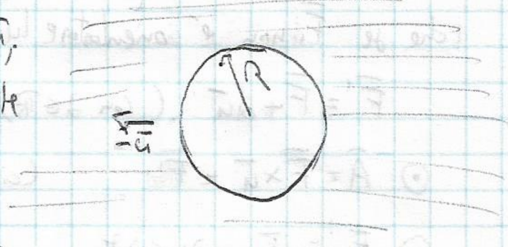
Problema di Stokes per sfera solida in fluido viscoso

Consideriamo una sfera di raggio R che si muova di moto rettilineo uniforme entro un fluido viscoso indefinitamente esteso, con velocità $-\bar{u}$, ovvero verso sinistra nel disegno. Il problema è equivalente a quello di una sfera ferma entro un fluido la cui velocità lontano dal corpo è $\bar{u}$ uniforme verso destra, e il cui campo di velocità $\bar{v}$ è soluzione ~~del~~ anche del primo problema sommando appunto $-\bar{u}$.



Trattiamo il problema
- nel caso stazionario,
- per $Re \to 0$, caso dominato da viscosità.

Si deve perciò risolvere l'eq. di Stokes $-\text{grad}\, p + \nu \nabla^2 \bar{v} = 0$.

Nel sdr della sfera $\bar{v}' = \bar{v} - \bar{u}$;

poiché il flusso è incomprimibile, $\text{div}\, \bar{v}' = \text{div}(\bar{v} - \bar{u}) = \text{div}(\bar{v}) - \cancel{\text{div}(\bar{u})} = 0$ 0, $\bar{u}$ uniforme

equivale a dire che $\exists \bar{A} \,/\, \bar{v}' = \text{rot}\,\bar{A}$, con $\underset{\bar{r}\to\infty}{\text{rot}\,\bar{A} = 0}$ ($\bar{A}$ campo vettoriale irrotazionale a grande distanza)

Il problema ha una simmetria evidente rispetto all'asse lungo cui va $\bar{u}$, che prendiamo come asse polare, ovvero $\bar{u} = u\hat{e}_z$, e si ha invarianza in φ. Cerchiamo una soluzione che rispetti la stessa simmetria, ovvero v' non dipenderà da φ e non ci saranno componenti in φ ($v'_\varphi = 0$).

$$\left.\begin{array}{l} v' = v'(r,\theta) = \text{rot}\,\bar{A} = f(r,\theta) \\ \text{con } (\text{rot}\,\bar{A})_\varphi = 0 \end{array}\right\} \text{ ciò equivale a dire che } \bar{A} = A\hat{e}_\varphi \Rightarrow \bar{A}\cdot\bar{u} = 0$$

Per $\bar{A}$ si può ipotizzare una dipendenza lineare da $\bar{u}$, perché il problema ha eq. del moto e b.c. lineari $\Rightarrow$ lineare in $\bar{u}$; poiché $\bar{A}\cdot\bar{u} = 0$, $\bar{A}$ ha una struttura del tipo

$\bar{A} = \bar{F} \times \bar{u}$ con $\bar{F} = \bar{F}(r,\theta)$ ma non funzione di $\bar{u}$ (in tal modo $\bar{A} \perp \bar{u}$, $\bar{A}$ lineare in $\bar{u}$);

$\bar{F} \perp \bar{A} \Rightarrow$ ha al più le componenti F_r, F_θ.

Poiché nella soluzione $\bar{A}$ le caratteristiche dinamiche hanno origine in $\bar{u}$, ipotizziamo che $\bar{F}$ abbia il ruolo di tenere conto della geometria soltanto del problema, ovvero del corpo sferico; questo per dire che supponiamo $\bar{F}$ puramente radiale, funzione a simmetria sferica con versore radiale $\hat{e}_r$ inteso centrato nel centro della sfera; allora scriviamo

$\bar{F} = f'(r)\hat{e}_r$

Possiamo dare più solida giustificazione all'ipotesi di invarianza sferica di $\bar{F}$, e in particolare al fatto che deve essere lungo $\hat{e}_r$; infatti se non lo fosse, potremmo dare una $\bar{F}'$ /

$\bar{F}' = \bar{F} + a\bar{u}$ (con $a \in \mathbb{R}$ arbitrario) $\Rightarrow$

⊙ $\bar{A} = \bar{F} \times \bar{u} = \bar{F}' \times \bar{u}$ (cioè non cambierebbe nulla per quanto concerne la soluzione di nostro interesse)

⊙ $F_r' = F_r + au\cos\vartheta$

$F_\vartheta' = F_\vartheta - au\sin\vartheta$

e potremmo scegliere a / $a = F_\vartheta / u\sin\vartheta \Rightarrow F_\vartheta' = \phi$

così da costruire comunque una $\bar{F}$ orientata radialmente. Dunque l'ipotesi è accettabile, e a posteriori viene verificata dal fatto che effettivamente risolve l'eq. di Stokes.

Ricapitolando abbiamo $\bar{A} = \bar{F} \times \bar{u} = f'(r)\hat{e}_r \times \bar{u} = -uf'(r)\sin\vartheta\,\hat{e}_\varphi = A_\varphi \hat{e}_\varphi$

e $\bar{v}' = \mathrm{rot}\bar{A} = \mathrm{rot}(f'(r)\hat{e}_r \times \bar{u})$

La funzione $f'(r)\hat{e}_r$ può essere rappresentata come gradiente di funzione scalare

$$f'(r)\hat{e}_r = \mathrm{grad}(f(r))$$

$$\Rightarrow \bar{A} = \bar{F} \times \bar{u} = \mathrm{grad}\, f(r) \times \bar{u} = \mathrm{rot}(f(r)\bar{u}) \quad (= f\,\cancel{\mathrm{rot}\bar{u}}^{\,\phi} + \mathrm{grad} f \times \bar{u})$$

$$\text{e} \quad \bar{v}' = \mathrm{rot}A = \mathrm{rot}(\mathrm{rot}(f\bar{u}))$$

Riprendiamo ora l'eq. di Stokes nella forma $\Delta(\mathrm{rot}\bar{v}) = \phi$ *

da cui anche $\Delta(\mathrm{rot}\bar{v}') = \phi$, e usando $\bar{v}' = \mathrm{rot}(\mathrm{rot}(f\bar{u}))$ abbiamo

$$\mathrm{rot}(\Delta\bar{v}) = \Delta(\mathrm{rot}\bar{v}) = \Delta(\mathrm{rot}\bar{v}') = \Delta\{\mathrm{rot}[\mathrm{rot}(\mathrm{rot}(f\bar{u}))]\} =$$

usando $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\bar{g}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\bar{g}) - \Delta\bar{g}$, con $\bar{g} = \mathrm{rot}(f\bar{u})$

$$= \Delta\{\mathrm{grad}[\underbrace{\mathrm{div}(\mathrm{rot}(f\bar{u}))}_{\mathrm{div}(\mathrm{rot}) = \phi}] - \Delta[\mathrm{rot}(f\bar{u})]\} = -\Delta^2[\mathrm{rot}(f\bar{u})] = \phi$$

$$\text{Ora } \phi = \Delta^2[\mathrm{rot}(f\bar{u})] = \Delta^2(\mathrm{grad} f \times \underbrace{\bar{u}}_{\text{vettore costante}}) = \Delta^2(\mathrm{grad} f) \times \bar{u} \Rightarrow \Delta^2(\mathrm{grad} f) \parallel \bar{u}$$

cioè $\Delta^2(\mathrm{grad} f) = a\bar{u}$

---

* = usiamo qui il simbolo Δ invece di ∇^2 per il laplaciano per evitare ambiguità nei calcoli successivi

La componente radiale dell'equazione è
$$\Delta^2 \frac{\partial}{\partial r} f(r) = 2a u\cos\vartheta$$

ma f è funzione solo di r e ⇒ anche $\Delta^2\partial_r f$ deve esserlo, il che comporta $a=\phi$,

⇒ $\Delta^2(\text{grad}\, f) = \phi$

che integrata una prima volta dà $\Delta^2 f = \text{costante}$,

dove la costante è tuttavia $=\phi$ visto che le condizioni al contorno impongono $\bar v' = \bar v - \bar u \underset{r\to\infty}{=} \phi$,

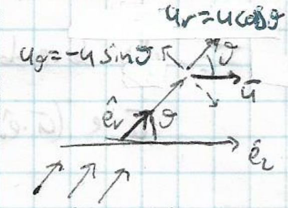
che non sarebbe possibile se avessimo derivate di f (e ⇒ di $\bar v'$) non nulle.

$\Delta^2 f(r)=\phi$ si riduce, per sola dipendenza radiale, a
$$\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)\right]^2 f(r) = \phi \qquad \left(\text{cioè}\quad \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{df}{dr}\right)\right]=\phi\right)$$

che ha soluzione del tipo

$f(r) = ar + b/r$ * la quale può essere inserita finalmente in $\bar v$:

$\bar v = \bar v' + \bar u = \bar u + \text{rot}\,\bar A = \bar u + \text{rot}(\text{rot}(f\bar u))$



Con una certa quantità di algebra, se $(f\bar u) = (f\bar u)_r \hat e_r + (f\bar u)_\vartheta \hat e_\vartheta = fu\cos\vartheta\, \hat e_r - fu\sin\vartheta\,\hat e_\vartheta$

$$\bar A = \text{rot}(f\bar u) = \hat e_\varphi \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r(fu)_\vartheta) - \frac{\partial}{\partial\vartheta}((fu)_r)\right] = \dots = \left[\frac{b}{r^2} - a\right] u\sin\vartheta\, \hat e_\varphi = A_\varphi \hat e_\varphi$$

$$\bar v' = \text{rot}\,\bar A = \text{rot}(A_\varphi\hat e_\varphi) = \hat e_r \frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}(A_\varphi\sin\vartheta)\right] + \hat e_\vartheta\left[-\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right] =$$

$$= -a\,\frac{2u\cos\vartheta\,\hat e_r - u\sin\vartheta\,\hat e_\vartheta}{r} + b\,\frac{2u\cos\vartheta\,\hat e_r + u\sin\vartheta\,\hat e_\vartheta}{r^3} =$$

---

* = esplicitamente, $\Delta^2 f=\phi$; chiamo $g \doteq \Delta f$ ⇒ $\Delta g = \phi$

⇒ $\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}g(r)\right)=\phi \to \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dg}{dr}\right)=\phi \to r^2\frac{dg}{dr}=\alpha \to \frac{dg}{dr}=\frac{\alpha}{r^2} \to g = -\frac{\alpha}{r}+\gamma$ ma $\gamma=\phi$ per le b.c. nulle

$\Delta f = g \to \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{df}{dr}\right) = -\frac{\alpha}{r} \to \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{df}{dr}\right) = -\alpha r \to r^2\frac{df}{dr} = -\frac{\alpha}{2}r^2+\beta \to \frac{df}{dr} = -\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{r^2}\to$

$\to f(r) = -\frac{\alpha}{2}r - \frac{\beta}{r}+\delta$; si può anche porre $\delta=\phi$, tanto è inessenziale perché sparisce in $\bar v$, che va con le derivate di f;

rinominando $a \doteq -\alpha/2$, $b=-\beta$ ⇒ $f(r)=ar+b/r$

$$= -a\,\frac{\overbrace{u\cos\vartheta\,\hat{e}_r + u\cos\vartheta\,\hat{e}_r - u\sin\vartheta\,\hat{e}_\vartheta}^{\bar{u}}}{r} + b\,\frac{\overbrace{3u\cos\vartheta\,\hat{e}_r - u\cos\vartheta\,\hat{e}_r + u\sin\vartheta\,\hat{e}_\vartheta}^{-\bar{u}}}{r^3} =$$

$$= -a\,\frac{\bar{u} + (\bar{u}\cdot\hat{e}_r)\hat{e}_r}{r} + b\,\frac{3(\bar{u}\cdot\hat{e}_r)\hat{e}_r - \bar{u}}{r^3}$$

$$\Rightarrow \bar{v} = \bar{u} + \bar{v}' = \bar{u} - a\,\frac{\bar{u} + (\bar{u}\cdot\hat{e}_r)\hat{e}_r}{r} + b\,\frac{3(\bar{u}\cdot\hat{e}_r)\hat{e}_r - \bar{u}}{r^3}$$

con a, b da trovare imponendo le b.c.; poiché $\bar{v}(r=R,\vartheta) = \phi$ (no-slip sulla sup. della sfera ferma entro il fluido in moto)

$$\Rightarrow \bar{u} - \frac{a\bar{u}}{R} - \frac{a(\bar{u}\cdot\hat{e}_r)\hat{e}_r}{R} + \frac{3b(\bar{u}\cdot\hat{e}_r)\hat{e}_r}{R^3} - \frac{b\bar{u}}{R^3} = \phi$$

$$\rightsquigarrow \bar{u}\left(1 - \frac{a}{R} - \frac{b}{R^3}\right) + (\bar{u}\cdot\hat{e}_r)\hat{e}_r\left(\frac{3b}{R^3} - \frac{a}{R}\right) = \phi$$

che dovendo valere $\forall\, \hat{e}_r$ viene soddisfatta annullando separatamente i coefficienti di $\bar{u}$ e $(\bar{u}\cdot\hat{e}_r)\hat{e}_r$:

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{a}{R} - \dfrac{b}{R^3} = \phi \\[2mm] \dfrac{3b}{R^3} - \dfrac{a}{R} = \phi \end{cases} \qquad \text{ovvero con } a = \frac{3}{4}R,\quad b = \frac{1}{4}R^3$$

e infine si ottiene $f(r) = \dfrac{3}{4}Rr + \dfrac{1}{4}\dfrac{R^3}{r}$, e la vel. $\bar{v}$ del fluido attorno alla sfera fissa

$$\bar{v}(r,\vartheta) = \bar{u} - \frac{3R}{4}\,\frac{\bar{u} + (\bar{u}\cdot\hat{e}_r)\hat{e}_r}{r} + \frac{R^3}{4}\,\frac{3(\bar{u}\cdot\hat{e}_r)\hat{e}_r - \bar{u}}{r^3},$$

o in componenti

$$v_r = \bar{v}\cdot\hat{e}_r = u\cos\vartheta\left[1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3}\right]$$

$$v_\vartheta = \bar{v}\cdot\hat{e}_\vartheta = -u\sin\vartheta\left[1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3}\right]$$

Si possono fare alcune osservazioni importanti su questa soluzione.

- Confronto con sfera in fluido perfetto (moto potenziale)

Avevamo trovato che una sfera rigida che si muoveva con velocità $\bar{u}$ (verso destra) entro un fluido perfetto (fermo a $r\to\infty$) generava un campo di velocità (che per coerenza di notazione chiamiamo $\bar{v}'_{perf}$)

$$\bar{v}'_{perf} = \frac{R^3}{2} \, \frac{3(\bar{u}\cdot\hat{e}_r)\hat{e}_r - \bar{u}}{r^3}$$

Se considerassimo moto verso sinistra cambieremmo $\Rightarrow$ il segno alla soluzione e passando al sdr della sfera fissa sommeremmo una $\bar{u}$ positiva verso destra del fluido, $\Rightarrow$

$$\bar{v}_{perf} = \bar{u} + \frac{R^3}{2} \, \frac{\bar{u} - 3(\bar{u}\cdot\hat{e}_r)\hat{e}_r}{r^3}$$

da confrontarsi con

$$\bar{v}_{visc} = \bar{u} - \frac{3R}{4} \, \frac{\bar{u} + (\bar{u}\cdot\hat{e}_r)\hat{e}_r}{r} + \frac{R^3}{4} \, \frac{3(\bar{u}\cdot\hat{e}_r)\hat{e}_r - \bar{u}}{r^3}$$

il cui ultimo termine, a meno di un fattore $-\frac{1}{2}$, ha la stessa struttura della soluzione nel moto potenziale, con un termine $\sim \frac{1}{r^3}$ a rotore nullo (termine di dipolo; del resto nel moto potenziale per definizione si aveva irrotazionalità);

appare inoltre un nuovo termine $\sim \frac{1}{r}$, a rotore non nullo (si annulla $\sim \frac{1}{r^2}$ per $r \to \infty$)

⊙ Campo di pressione

$$\mathrm{grad}\, p = \eta \Delta \bar{v} = \eta \Delta \bar{v}' = \eta \Delta [\mathrm{rot}[\mathrm{rot}(f\bar{u})]] = \eta \Delta [\mathrm{grad}[\mathrm{div}(f\bar{u})] - \bar{u}\Delta f] =$$

$$= \mathrm{grad}[\eta \Delta \underbrace{[\mathrm{div}(f\bar{u})]}_{\bar{u}\cdot\mathrm{grad} f + f\,\mathrm{div}\bar{u}}] - \underbrace{\eta \Delta(\bar{u}\Delta f)}_{= \eta \bar{u} \Delta^2 f = \phi} = \mathrm{grad}[\eta \Delta(\bar{u}\cdot\mathrm{grad} f)] =$$

$$= \mathrm{grad}[\eta \bar{u}\cdot\Delta(\mathrm{grad} f)] = \mathrm{grad}[\eta \bar{u}\cdot\mathrm{grad}(\Delta f)]$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{grad}\, p = \mathrm{grad}(\eta \bar{u}\cdot\mathrm{grad}(\Delta f))$$

$$\Rightarrow \quad p = p_0 + \eta \bar{u}\cdot\mathrm{grad}(\Delta f)$$ e inserendo $f(r) = \frac{3R}{4} r + \frac{R^3}{4r}$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{df}{dr}\right) = \ldots = \frac{3R}{2r} \quad ; \quad \mathrm{grad}(\Delta f) = \hat{e}_r \frac{d}{dr}(\Delta f) = -\frac{3R}{2r^2}\hat{e}_r$$

$$\Rightarrow \boxed{p = p_0 - \frac{3}{2}\eta R \frac{\bar{u}\cdot\hat{e}_r}{r^2}}$$ che per $r \to \infty$, lontano dal corpo, si riduce a p_0 (pressione nel flusso uniforme indisturbato)

① Forza applicata sulla sfera

La forza esercitata sulla sfera dal fluido in moto, o equivalentemente la forza di resistenza esercitata sulla sfera che si muove nel fluido altrimenti statico è calcolata a partire dalla forza elementare sull'elemento di superficie sferico di area da:

$\sigma_{ij} n_j da$, o in coord. sferiche (con asse polare sempre $\parallel \bar{u}$)

$\sigma_{rj} n_j R^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ con $\hat{n} = \bar{u}/|\bar{u}|$,

avendo una forza che chiaramente avrà risultante lungo l'asse di $\bar{u}$ (nonché invarianza in φ), ricordando che $\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - p\delta_{ij}$,

e prendendo la proiezione di tutte le componenti lungo la velocità $\bar{u}$ ($n_j = \hat{e}_z$)

$$\sigma_{rj} n_j = -p\cos\vartheta + \sigma'_{rr}\cos\vartheta - \sigma'_{r\vartheta}\sin\vartheta$$

si può integrare e ottenere la forza risultante F su tutta la sup. sferica

$$F = \int_\phi^{2\pi}\int_\phi^{\pi} \left(-p\cos\vartheta + \sigma'_{rr}\cos\vartheta - \sigma'_{r\vartheta}\sin\vartheta\right) R^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$$

dove

$$p(R) = p_0 - \frac{3}{2}\frac{\eta u\cos\vartheta}{R} \quad ; \quad \sigma'_{rr}(R) = 2\eta \left.\frac{\partial v_r}{\partial r}\right|_{r=R} = 2\eta u\cos\vartheta \left[\frac{3R}{2r^2} - \frac{3R^3}{2r^4}\right]_{r=R} = \phi$$

$$\sigma'_{r\vartheta} = \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\vartheta} + \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} - \frac{v_\vartheta}{r}\right)\Bigg|_{r=R} = \eta\left[\cancel{-u\sin\vartheta\left[\frac{1}{r} - \frac{3R}{4r} + \frac{R^3}{2r^3}\right]} - u\sin\vartheta\left[\frac{3R}{4r^2} + \frac{3R^3}{4r^4}\right] \cancel{+ u\sin\vartheta\left[\frac{1}{r} - \frac{3R}{4r} + \frac{R^3}{4r^3}\right]}\right]_R$$

$$= -\eta u\sin\vartheta\left(\frac{3}{4R} + \frac{3}{4R}\right) = -\frac{3\eta}{2R} u\sin\vartheta$$

$$\Rightarrow F = \int_\phi^{2\pi}\int_\phi^{\pi}\Big[-p_0\cos\vartheta + \underbrace{\frac{3\eta}{2R}u\cos^2\vartheta + \frac{3\eta}{2R}u\sin^2\vartheta}_{=3\eta u/2R}\Big] R^2\sin\vartheta d\vartheta d\varphi =$$

$$\int_\phi^{\pi}\cos\vartheta\sin\vartheta d\vartheta = \int_\phi^{\pi}\sin(2\vartheta)d\vartheta = \phi$$

$$= \frac{3\eta u R}{2}\int_\phi^{2\pi}\int_\phi^{\pi}\sin\vartheta d\vartheta d\varphi = 3\eta u R\pi\int_\phi^{\pi}\sin\vartheta d\vartheta = \underline{\underline{6\eta\pi u R}} \quad \text{formula di Stokes}$$

Si noti che F è lineare in u e R. Questo fatto può essere intuito senza il calcolo esplicito, tramite argomentazioni di carattere dimensionale: nell'eq. di Stokes non compare la densità ρ, dunque la forza deve essere un'espressione di η, u, R e l'unica combinazione di questi termini che dimensionalmente sia una forza è proprio la combinazione lineare $\eta u R$.

La forza su oggetti in moto lento ($Re \to 0$) che abbiano forma non sferica sarà più complessa, ma qualitativamente simile. La direzione della forza di resistenza (drag) non è più quella della velocità, ma la relazione tra $\bar{F}$ e $\bar{u}$ si scrive in termini generali come

$$F_i = \eta a_{ik} u_k$$

con a_{ik} tensore di rango due indipendente da u.

⊙ Perfezionamento della formula di Stokes - formula di Oseen e coefficiente di penetrazione

La soluzione trovata per l'approssimazione di Stokes è insoddisfacente a grandi distanze, e questo perché per grandi r, pur con piccolo Re, il termine convettivo non è più trascurabile.

Infatti $\bar{v} \to \bar{u}$ per grande r, mentre il termine dominante della $\bar{v}$ soluzione di Stokes è $\sim \frac{uR}{r} \Rightarrow \text{grad}\,\bar{v} \sim uR/r^2$

$$\Rightarrow (\bar{v}\cdot\text{grad}\,\bar{v})_{r\to\infty} \sim u^2R/r^2$$

Esso va confrontato col termine viscoso $\nu\nabla^2\bar{v}$, con derivate seconde di $\frac{1}{r} \Rightarrow \sim \frac{1}{r^3}$

$$\Rightarrow \nu\nabla^2\bar{v}_{r\to\infty} \sim \nu uR/r^3$$

Perché il termine convettivo sia trascurabile è necessario richiedere

$$\frac{u^2R}{r^2} \ll \frac{\nu u R}{r^3} \Rightarrow r \ll \frac{\nu}{u}$$

ovvero c'è un limite di distanza oltre la quale il problema di Stokes è inesatto.

Una possibilità di miglioramento è l'approssimazione di Oseen: il termine convettivo è incluso approssimandolo come $(\bar{v}\cdot\text{grad})\bar{v} \to (\bar{u}\cdot\text{grad})\bar{v}$ che è più accettabile a grandi r, ottenendo quindi l'eq.

$$(\bar{u}\cdot\text{grad})\bar{v} = -\frac{1}{\rho}\text{grad}\,p + \nu\nabla^2\bar{v}$$

In pratica si ottiene una soluzione (che ci limitiamo a riportare) che esprime la forza con un termine in più; avendo inserito un termine superiore in $\bar{u}$, la F ha un termine superiore come sviluppo in potenze del numero di Reynolds; la formula finale è

$$F = 6\eta\pi u R\left(1 + 3uR/8\nu\right)$$

La forza si esprime anche utilizzando il <u>coefficiente di penetrazione</u>, quantità adimensionata $C(Re)$ che esprime le caratteristiche geometriche del problema ed è costante una volta fissate le proprietà del moto, ovvero Re. Dunque definiamo C attraverso l'espressione

$$F = \underbrace{\frac{1}{2}\rho U^2 S}_{\text{dimensionalmente una forza}} C(Re)$$

con S l'area di una sezione opportuna (ordinariamente trasversale alla $\bar{F}$ stessa, e al moto se $\bar{F} // \bar{u}$).

Per la sfera, se usiamo $L = 2R$ nel definire Re, $S = \pi R^2$, $u = U$

- con la formula di Stokes

$$F = 6\eta\pi u R = \frac{1}{2}\rho u^2 \overbrace{\pi R^2}^{S} \frac{24\eta}{u\underbrace{(2R)}_{L}} = \frac{1}{2}\rho u^2 S\, 24/Re$$

$\Rightarrow C = 24/Re$ che è verificato sperimentalmente come valida per $Re < 0.1$

- con la formula di Oseen

$$F = 6\pi\eta u R\left(1 + \frac{3uR}{8\nu}\right) = \frac{1}{2}\rho u^2 S \frac{24}{Re}\left(1 + \frac{3}{16}\frac{u \cdot 2R}{\nu}\right) = \frac{1}{2}\rho u^2 S \frac{24}{Re}\left(1 + \frac{3}{16}Re\right)$$

$\Rightarrow C = \frac{24}{Re}\left(1 + \frac{3}{16}Re\right)$ sperimentalmente valida per $Re < 0.8$

- con una formula di origine empirica

$C = \frac{24}{Re}\left(1 + \frac{3}{8}Re\right)^{\frac{1}{2}}$ sperimentalmente valida per $Re < 100$