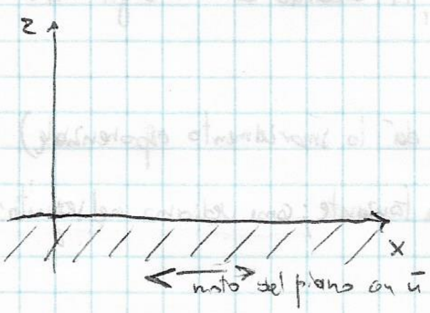
Moti oscillatori in fluidi viscosi

Fluido infinitamente profondo su piano oscillante



Consideriamo un fluido viscoso incomprimibile di profondità in z superiormente illimitata e inferiormente limitata in $z=0$ da un piano solido. Il fluido è indefinitamente esteso in x e y.

La b.c. specifica, che suggerisce il tipo di soluzione è data da un moto oscillatorio del piano lungo l'asse, descritto dalla velocità $\bar{u}(t) = u_0 e^{-i\omega t}\hat{e}_x$ (moto con frequenza $\omega/2\pi$ e massima velocità u_0). Il problema è invariante in x e y, la b.c. dà velocità solo in x, e ⇒ cerchiamo una soluzione di regime (ovvero dipendente sì dal tempo ma in modo periodico, superata una fase transitoria iniziale) che rispetti queste simmetrie:

$\bar{v}(z,t) = v_x(z,t)\,\hat{e}_x$ con $v_y = v_z = 0$, essa rispetta già l'incomprimibilità $\mathrm{div}\,\bar{v} = 0$

Poiché $(\bar{v}\cdot\mathrm{grad})\bar{v} = v_x \cancel{\partial_x} \bar{v} + \cancel{v_y}\partial_y \bar{v} + \cancel{v_z}\partial_z \bar{v} = 0$,

e non c'è grad p lungo x imposto esternamente, la comp. x dell'eq. di Navier-Stokes si riduce a

$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu\nabla^2 v_x$ e poiché del laplaciano resta solo ∂_{zz} ⇒ $\underline{\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}}$

Più nello specifico, vista la b.c. oscillante supponiamo una soluzione ondulatoria del tipo

$v_x(z,t) = v_0 \exp[i(kz-\omega t)]$ che si può inserire in N.-S.:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -i\omega v_0 \exp[i(kz-\omega t)] = \nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = -\nu k^2 v_0 \exp[i(kz-\omega t)]$$

ovvero $\underline{k^2 = i\omega/\nu}$ da cui, essendo $\sqrt{i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$,

$k = \pm\sqrt{\omega/2\nu}\,(1+i)$ relazione di dispersione con due k possibili, tuttavia per il segno −

$ikz = z\sqrt{\omega/2\nu}\,(-i)(1+i) = z\sqrt{\omega/2\nu}\,(1-i)$ ovvero quando $Im(k) < 0$ si ha $Re(ikz) > 0$

cioè un'esponenziale che diverge per $z \to +\infty$. Ciò è in opposizione a una soluzione fisicamente sensata, in cui non solo ci aspettiamo soluzione limitata, ma proprio che lontano dalla perturbazione (piano oscillante) il moto si attenui. Dunque accettiamo solo K /

$$K = \sqrt{\omega/2\nu}\,(1+i) = (1+i)/\delta$$

dove si definisce $\delta \doteq \sqrt{2\nu/\omega}$ <u>profondità di penetrazione</u>, in accordo col suo significato di scala di lunghezza su cui si attenua la perturbazione.

La presenza di una parte reale in K (oltre alla $\mathrm{Im}(K)$ che dà lo smorzamento esponenziale) è segno di uno <u>sfasamento</u> dell'effetto di oscillazione rispetto alla forzante:

$$i(Kz-\omega t) = i\left[\frac{1}{\delta}(1+i)z-\omega t\right] = -\frac{z}{\delta}+i\left(\frac{z}{\delta}-\omega t\right)$$

$$\Rightarrow v_x(z,t) = v_0\, e^{-z/\delta} \exp\left[i(z/\delta-\omega t)\right]$$

Con la b.c. di no-slip $\bar{v}(\phi,t) = v_0 e^{-i\omega t}\hat{e}_x = \bar{u}(t) = u_0 e^{-i\omega t}\hat{e}_x$ si ha

$v_0 = u_0 \Rightarrow$ la soluzione è

$$\bar{v}(z,t) = u_0\, e^{-z/\delta} \exp\Big[\underbrace{i(z/\delta-\omega t)}_{\text{sfasamento}}\Big]\,\hat{e}_x$$

onda trasversale (perpendicolarità tra moto e direzione di propagazione dell'onda) con smorzamento lungo la direzione di propagazione e sfasamento sempre lungo tale direzione che è dipendente dalla distanza (in modo periodico).

Lo sforzo tangenziale (attrito) per unità di area è

$$\sigma_{zx} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z}\bigg|_{z=\phi} = \left[-\eta/_\delta\, u_0 e^{-z/\delta}\exp[\dots] + i\eta/_\delta\, u_0 e^{-z/\delta}\exp[\dots]\right]\bigg|_{z=\phi} =$$

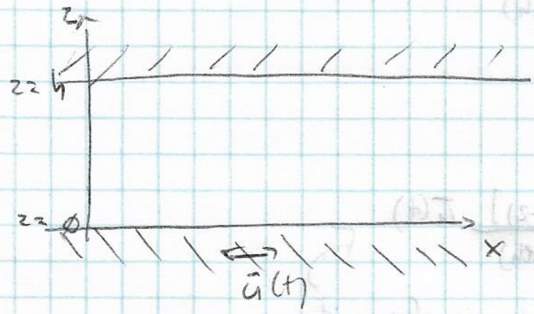
$$= \eta/_\delta (i-1)\, u_0 e^{-i\omega t} = \eta\sqrt{\omega/2\nu} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\omega\rho\eta}\;\underset{\text{si noti lo sfasamento anche tra forzante e attrito}}{(i-1)}\,u(t) \qquad \left(i-1 = e^{i3\pi/4}\right)$$

La media sul periodo della potenza specifica (energia per unità di tempo e area) dissipata è

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \frac{\text{Forza}}{\text{Area}}}}{\langle\, \sigma_{zx}\big|_{z=\phi}}\; u(t)\,\rangle = \langle \mathrm{Re}\Big[\sqrt{\tfrac{1}{2}\omega\rho\eta}\,(i-1)\,\underbrace{u^2(t)}\Big]\rangle = -\frac{1}{2}u_0^2\sqrt{\omega\rho\eta/2}$$

$\frac{\text{Forza}}{\text{Area}}\cdot\text{vel} \Rightarrow \frac{P}{\text{area}}$ media $\frac{1}{2}u_0^2$

Oscillazione in fluido limitato tra due piani



In questo caso il fluido incompressibile viscoso è indefinitamente esteso in x e y, ma limitato inferiormente da due piani solidi a $z = 0$ e $z = h$.

Il piano superiore è fisso, quello inferiore ha velocità lungo x

$$\vec{u}(t) = u_0 e^{-i\omega t} \hat{e}_x$$

Le invarianze del caso precedente valgono anche qui, perciò la soluzione ipotizzata resta del tipo

$$\vec{v}(z,t) = v_x(z,t)\hat{e}_x$$

e il problema di Navier-Stokes si riduce (in componente x) a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \\ + \text{b.c.} \quad v_x(z=0) = u(t) = u_0 e^{-i\omega t} \\ \qquad\quad v_x(z=h) = 0 \end{cases}$$

La soluzione di prova, più specificamente si può scrivere come

$$v_x(z,t) = \left[A \sin(\kappa z) + B \cos(\kappa z)\right] e^{-i\omega t} \; *$$

che inserita in N.-S. dà

$$-i\omega \left(A \sin(\kappa z) + B\cos(\kappa z)\right) e^{-i\omega t} = -\nu \kappa^2 \left(A\sin(\kappa z) + B\cos(\kappa z)\right) e^{-i\omega t}$$

ovvero la stessa relazione di dispersione

$\kappa^2 = i\omega/\nu$, cioè, con $\delta \doteq \sqrt{2\nu/\omega}$, $\kappa = (1+i)/\delta$ (si vede poi che la soluzione con $\kappa = -(1+i)/\delta$ è uguale)

Usando le b.c. $v(0,t) = [\cancel{A\sin(0)} + B\underbrace{\cos(0)}_{1}]e^{-i\omega t} = u(t) = u_0 e^{-i\omega t}$

$\Rightarrow \boxed{B = u_0}$; $\quad v(h,t) = \left[A \sin(\kappa h) + u_0 \cos(\kappa h)\right] e^{-i\omega t} = 0$

$\Rightarrow \boxed{A = -u_0 \cot g(\kappa h)}$

Rielaboriamo il fattore della dipendenza spaziale in $\vec{v}(z,t)$:

$*$ = questa forma si può vedere come sovrapposizione di due onde (del tipo del caso semiinfinito visto prima) propaganti in verso opposto. Con un po' di algebra, sfruttando le relazioni tra funzioni sinusoidali ed esponenziali di argomento immaginario, si vede che la soluzione è la stessa (cfr. per es. T.E. Faber, "Fluid Dynamics for Physicists", CUP)

$$\cos(Kz) - \cot g(Kh)\sin(Kz) = \frac{\sin(Kh)\cos(Kz) - \cos(Kh)\sin(Kz)}{\sin(Kh)} =$$

$$= \frac{\sin(Kh - Kz)}{\sin(Kh)} = \frac{\sin[K(h-z)]}{\sin(Kh)}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(z,t) = \frac{\sin[K(h-z)]}{\sin(Kh)} u_0 e^{-i\omega t}\hat{e}_x = \frac{\sin[K(h-z)]}{\sin(Kh)}\vec{u}(t)$$

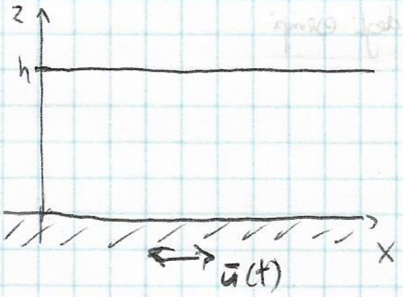
La forza d'attrito per unità di superficie sui due piani è:

in $z=0$ $\quad f_x^{(0)} = \sigma_{zx}\Big|_{z=0} = \eta\frac{\partial v_x}{\partial z}\Big|_{z=0} = -\eta K\frac{\cos(Kh)}{\sin(Kh)}u(t) = -\eta K \cot g(Kh)\,u(t)$

in $z=h$ $\quad f_x^{(h)} = -\sigma_{zx}\Big|_{z=h} = \eta\frac{\partial v_x}{\partial z}\Big|_{z=h} = -\eta K\frac{\cos(K(h-z))}{\sin(Kh)}\Big|_{z=h}u(t) = \eta K\frac{1}{\sin(Kh)}u(t) = \eta K \operatorname{cosec}(Kh)\,u(t)$

dove va ricordato che K è complesso e quindi include una parte di sfasamento.

Oscillazione di uno strato di fluido con pelo libero



In questo caso il fluido viscoso incomprimibile poggia sul solito piano oscillante con velocità

$\bar{u}(t) = u_0 e^{-i\omega t} \hat{e}_x$ (prima b.c.)

e ha una superficie libera in $z=h$, in cui dunque non c'è attrito: $\sigma_{zx}(z=h) = \eta \left.\frac{\partial v_x}{\partial z}\right|_{z=h} = \phi$ (seconda b.c.)

Avendo le stesse ipotesi di simmetria dei casi precedenti, cerchiamo una soluzione di regime del tipo

$$\bar{v}(z,t) = v_x(z,t)\,\hat{e}_x = \left[A\sin(kz) + B\cos(kz)\right] e^{-i\omega t}\hat{e}_x$$ da inserire nell'eq. di Navier-Stokes (comp. x)

$$\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \\ + \text{b.c. } v_x(\phi,t) = u_0 e^{-i\omega t} \\ \sigma_{zx}(z=h,t) = \eta \left.\frac{\partial v_x}{\partial z}\right|_{z=h} = \phi \end{cases}$$

Immessa in N.-S., la soluzione di prova dà la solita relazione di dispersione

$$k^2 = i\omega/\nu \Rightarrow k = (1+i)/\delta \text{ con } \delta \doteq \sqrt{2\nu/\omega};$$

la prima b.c. dà

$$v_x(\phi,t) = Be^{-i\omega t} = u_0 e^{-i\omega t} \Rightarrow \boxed{B = u_0}$$

la seconda b.c. dà $\eta \left.\frac{\partial v_x}{\partial z}\right|_{z=h} = \eta k \left[A\cos(kh) - u_0 \sin(kh)\right] e^{-i\omega t} = \phi \Rightarrow \boxed{A = u_0 \, tg(kh)}$.

e rielaborando la parte spaziale di v_x

$$tg(kh)\sin(kz) + \cos(kz) = \frac{\sin(kh)\sin(kz) + \cos(kh)\cos(kz)}{\cos(kh)} = \frac{\cos(kh-kz)}{\cos(kh)} = \frac{\cos[k(h-z)]}{\cos(kh)}$$

$$\Rightarrow \bar{v}(z,t) = \frac{\cos[k(h-z)]}{\cos(kh)} u_0 e^{-i\omega t}\hat{e}_x = \frac{\cos[k(h-z)]}{\cos(kh)} \bar{u}(t)$$

L'attrito sul piano è calcolato come forza per unità di superficie $f_x^{(s)} = \sigma_{zx}\big|_{z=\phi} = \eta \left.\frac{\partial v_x}{\partial z}\right|_{z=\phi} = -\eta k \, tg(kh) u(t)$;

da notare lo sfasamento implicito in $k \in \mathbb{C}$ e la velocità non nulla sulla superficie libera $\bar{u}(t)/\cos(kh)$.

Corpo generico oscillante in un fluido viscoso

Per un corpo di forma generica, non valendo più le simmetrie degli esempi esposti in precedenza non si può più automaticamente avere $(\bar{v}\cdot \text{grad})\bar{v} = \phi$; possiamo fare delle considerazioni di qualche importanza supponendo di porci in casi in cui il termine convettivo possa essere comunque trascurato, così che l'eq. di Navier-Stokes diventi

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\,\text{grad}\,p + \nu \nabla^2 \bar{v} \qquad \text{e applicandovi il rotore}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot}\,\bar{v}) = \nu \nabla^2 (\text{rot}\,\bar{v})$$

Dagli esempi già visti, sappiamo che l'eq. $\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \nu \nabla^2 \bar{f}$ ha soluzione con decrescita esponenziale di $\bar{f}$ con la distanza $\Rightarrow$

$\bar{f} = \text{rot}\,\bar{v} \sim e^{-r/\delta}$

e ciò significa che il moto è rotazionale intorno al corpo, dopodiché, su scale spaziali dell'ordine di δ, diventa potenziale; come sappiamo,

per $\text{rot}\,\bar{v} = \phi \Rightarrow \exists \phi /\ \text{grad}\,\phi = \bar{v}$,

e per flusso incomprimibile $\text{div}(\bar{v}) = \text{div}(\text{grad}\,\phi) = \nabla^2 \phi = \phi$

Si possono dunque valutare tre casi limite di questa situazione, dipendentemente dal confronto tra δ, profondità di penetrazione, e ℓ, dimensione caratteristica del corpo.

1) $\delta \gg \ell$

Se possiamo anche metterci in condizioni di $Re \ll 1$, detta a l'ampiezza di oscillazione, $v_{corpo} \sim a\omega$, abbiamo $Re = \frac{a\omega \ell}{\nu} \ll 1$

che corrisponde a un caso di oscillazioni lente (bassa ω), cioè lente variazioni temporali di velocità; dunque il termine $\partial \bar{v}/\partial t$ è ignorabile nell'equ. di Navier-Stokes, mentre il termine convettivo $(\bar{v}\cdot\text{grad})\bar{v}$ è ignorabile perché Re piccolo. La sparizione del termine $\partial \bar{v}/\partial t$ indica un flusso praticamente stazionario, si torna a quello che è il problema di Stokes in cui il flusso a un $\forall t$ è quello che si ottiene risolvendo l'eq. di Stokes (stazionaria) per il corpo in movimento con la sua velocità istantanea, e ciò si può fare istante per istante.

② $\delta \ll l$

Per poter ignorare il termine convettivo, è necessario richiedere che l'ampiezza di oscillazione a sia piccola rispetto alle dimensioni caratteristiche del corpo: $a \ll l$ (la velocità varierà cioè su scale grandi rispetto all'oscillazione); stimando gli ordini di grandezza,

- vicino al corpo $\bar{v} \sim \bar{v}_{tgziale}$, che varia significativamente su distanze $\sim l$;

$\Rightarrow (\bar{v}\cdot \text{grad})\bar{v} \sim v^2/l \sim a^2\omega^2/l$
$v \sim a\omega$

- $\partial \bar{v}/\partial t \sim \omega v \sim a\omega^2$

$\Rightarrow$ nel confronto per trascurare il termine convettivo

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \gg (\bar{v}\cdot\text{grad})\bar{v} \rightarrow a\omega^2 \gg a^2\omega^2/l \quad \text{cioè appunto } a \ll l$$

mentre non viene fatta richiesta sulla grandezza del numero di Reynolds.

Il rotore di $\bar{v}$ si smorza oltre uno strato sottile $\sim \delta$ intorno al corpo, oltre il quale si ha flusso potenziale di fluido perfetto (da N.-S. $\rightarrow$ ci si riduce all'eq. di Eulero).

Resta il problema del tipo di condizione al contorno, perché la condizione di no-slip non può essere soddisfatta da fluido ideale, per il quale si può solo imporre l'uguaglianza sulla superficie solida tra velocità normali di fluido e corpo. E del resto la soluzione per il fluido perfetto potenziale incomprimibile (da rot $\bar{v} = \emptyset$, div $\bar{v} = \emptyset$) non sarebbe corretta per lo strato limite superficiale: non rispondendo ad alcuna imposizione per la $v_{tgziale}$ sulla superficie, questa risulterebbe con valori discrepanti rispetto alla $v_{tgziale}$ del corpo, ovvero in altre parole $v_{tgziale}$ ha una brusca variazione nello strato limite che connette il flusso potenziale al corpo immerso.

Per una descrizione del comportamento in questo caso, in termini generali, si può immaginare di studiare il problema localmente, in una regione adiacente a una porzione della superficie del corpo di dimensione tipica sufficientemente $> \delta$ ma comunque $< l$, così da essere approssimata circa come piana; si può dunque usare localmente la soluzione per il flusso con piano oscillante: inteso x asse tgziale al piano, z asse normale, v_x sarà la vel. fluida tgziale al piano (che va a zero sul piano); detta $v_0 e^{-i\omega t}$ la velocità trovata come soluzione del flusso perfetto potenziale, la v_x avrà uno smorzamento dalla regione potenziale verso il corpo del tipo

$$v_x = v_0 e^{-i\omega t}\left(1 - e^{-(1-i)z/\delta}\right)$$

e la dissipazione di energia avrà forma

$$\langle \dot{E}_M \rangle = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\omega\eta\rho}\oint_{S_0} |v_0|^2\, df \qquad \text{con } S_0 \text{ superficie del corpo}$$

(potenza per unità di area del piano $-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\omega\eta\rho\right)^{\frac{1}{2}} u_0^2$ integrata su tutta S_0)

Una nota generale conclusiva si può fare a complemento di quanto rilevato nel calcolo dell'attrito per gli esempi visti, in cui si era appunto notato che avendo quantità complesse se ne doveva interpretare la parte reale come dissipazione.

Più nello specifico, se scriviamo la forza di resistenza come proporzionale a $u = u_0 e^{-i\omega t}$ (complessa), ovvero

$$F = \beta u$$

per β esso stesso $\in \mathbb{C}$ diciamo che $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ con $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow F = \beta u = \beta_1 u + i\beta_2 u = \text{ sfruttando il fatto che } \dot{u}(t) = -i\omega u(t)$$

$$= \beta_1 u - \beta_2 \dot{u}/\omega$$

e abbiamo un'espressione a coefficienti <u>reali</u> in cui si vede F come somma di due termini proporzionali uno alla velocità e l'altro all'accelerazione.

Calcoliamo la dissipazione di energia mediata sul periodo, che è il prodotto di velocità per la forza di drag, per sole parti reali, mediato temporalmente:

$$Re(u) = \frac{1}{2}(u + u^*) = \frac{1}{2}\left(u_0 e^{-i\omega t} + u_0^* e^{i\omega t}\right)$$

$$Re(F) = \frac{1}{2}(F + F^*) = \frac{1}{2}\left(u_0\beta e^{-i\omega t} + u_0^*\beta^* e^{i\omega t}\right)$$

$$\Rightarrow \langle \dot{E}_M \rangle = \langle F u \rangle = \left\langle \frac{1}{4}\left[\underbrace{u_0^2\beta e^{-2i\omega t}} + u_0 u_0^* \beta^* + u_0 u_0^* \beta + \underbrace{u_0^{*2}\beta e^{2i\omega t}}\right]\right\rangle =$$

termini oscillanti $\Rightarrow$ a media nulla

$$= \frac{1}{4}|u_0|^2(\beta + \beta^*) = \frac{1}{2}|u_0|^2 \beta_1$$

che evidenzia l'apparire del solo β_1, ovvero che la dissipazione viene dalla parte reale di β coefficiente di drag, e ⇒ davvero proporzionale alla velocità, mentre non c'è contributo dalla parte proporzionale all'accelerazione; quest'ultima è detta parte inerziale del drag, è equivalente a un "aumentare la massa" del piano o corpo in moto e implica lo sfasamento nel moto periodico (o, supponendo di spegnere la perturbazione, la parte dissipativa del drag smorza l'oscillazione, la parte inerziale tende a rallentare l'oscillazione; il damping di un moto oscillatorio in fluido viscoso è stato utilizzato per realizzare viscosimetri alternativi a quello già visto di Couette, e basati sulla misura dello smorzamento per ricavare la viscosità del fluido: ne è esempio il viscosimetro a disco oscillante di Maxwell).