Smorzamento di onde di gravità

Come per moti oscillatori indotti dai solidi in moto, si può fare qualche valutazione sullo smorzamento nel caso di oscillazioni sulla superficie libera di un fluido, quali possono essere le onde di gravità, in presenza di viscosità.

Consideriamo il caso di onde di gravità di ampiezza a, lunghezza d'onda λ, pulsazione ω in prossimità del pelo libero di un fluido viscoso di profondità molto grande ($h \gg a, \lambda \Rightarrow$ come $h \to \infty$). Quello che per il corpo oscillante era ℓ lunghezza caratteristica dell'oggetto è ora λ lunghezza d'onda, e ci poniamo nella condizione

$a \ll \lambda$ (equivalente al caso ② del corpo oscillante)

per il quale possiamo dire che il moto è potenziale quasi ovunque, eccetto un sottile strato superficiale del fluido, in cui le derivate della velocità presenti nell'espressione degli sforzi tangenziali devono decrescere abbastanza rapidamente da arrivare a zero sulla superficie (b.c. sul pelo libero è sforzo tgziale nullo), anche se non si ha necessità di gradienti forti come per il contatto con superfici solide (dove è proprio la $v_{tg} = \phi$).

La dissipazione di energia meccanica è, come già ricavato,

$$\frac{dE_{mecc}}{dt} = -\frac{1}{2}\eta\int\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2 d^3x$$

su tutto il volume del fluido; ma in realtà ci si può limitare alla regione di flusso potenziale, perché:

- ⊙ la regione di flusso rotazionale è piccola (strato sottile)
- ⊙ nella regione rotazionale i gradienti non sono così forti

} contributo limitato $\Rightarrow$ trascurato

Per il flusso potenziale $\quad \vec{v} = \operatorname{grad}\varphi \Rightarrow \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$

$$\Rightarrow \frac{dE_{mecc}}{dt} = -\frac{1}{2}\eta\int\left(2\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)^2 d^3x = -2\eta\int\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 d^3x$$

e conosciamo anche la soluzione $\quad \varphi(x,z,t) = \varphi_0 e^{kz}\cos(kx-\omega t+\phi)$;

$$\langle(\partial_i\partial_j\varphi)^2\rangle = \langle(\partial_x\partial_x\varphi)^2+(\partial_z\partial_z\varphi)^2+(\partial_x\partial_z\varphi)^2+(\partial_z\partial_x\varphi)^2\rangle =$$

$$= \langle k^4\varphi_0^2 e^{2kz}\cos^2(kx-\omega t+\phi)+k^4\varphi_0^2 e^{2kz}\cos^2(\ldots)+k^4\varphi_0^2 e^{2kz}\sin^2(\ldots)+k^4\varphi_0^2 e^{2kz}\sin^2(\ldots)\rangle$$

$\left(\langle\sin^2\rangle = \langle\cos^2\rangle = \frac{1}{2} \Rightarrow\right) \quad = 4k^4\langle\varphi^2\rangle$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{dE_{mecc}}{dt} \right\rangle = -8\eta k^4 \int \langle \varphi^2 \rangle d^3x$$

dove abbiamo mediato sul periodo per vedere la dissipazione come trend al netto delle oscillazioni istantanee.

Per un sistema in regime di piccole oscillazioni, l'energia cinetica e potenziale hanno uguale valore medio sul periodo*; perciò è possibile calcolare l'energia meccanica media:

$$\langle E_{mecc} \rangle = 2\langle E_k \rangle = \rho \int \langle v^2 \rangle d^3x = \rho \int \langle \vec{v} \cdot \vec{v} \rangle d^3x = \rho \int \langle v_x^2 + v_z^2 \rangle d^3x =$$

$$= \rho \int \left[\left\langle \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right\rangle + \left\langle \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\rangle \right] d^3x = \rho \int \left[\langle k^2 \varphi_0^2 e^{2kz} \sin^2(\dots) \rangle + \langle k^2 \varphi_0^2 e^{2kz} \cos^2(\dots) \rangle \right] d^3x =$$

$$= \rho \int k^2 \cdot 2 \langle \varphi^2 \rangle d^3x = 2\rho k^2 \int \langle \varphi^2 \rangle d^3x$$

Dunque definendo $2\gamma \doteq - \langle \dot{E}_{mecc} \rangle / \langle E_{mecc} \rangle = 8\eta k^4 / 2\rho k^2 = 4\nu k^2$

si ha $\langle E_{mecc} \rangle = \langle E_{mecc,0} \rangle e^{-2\gamma t}$ andamento di decrescita esponenziale dell'energia e poiché $E_{mecc} \propto a^2$ l'ampiezza si smorza con $a \sim e^{-\gamma t}$, ovvero con un coefficiente di smorzamento esponenziale $\boxed{\gamma = 2\nu k^2 = 2\nu \omega^4 / g^2}$

con la rel. di dispersione per bacini profondi $\omega^2 = kg$

Si noti che in un pacchetto con onde di $\neq \lambda$, lo smorzamento è maggiore per grandi k, cioè piccole λ (le onde lunghe si attenuano meno).

Nota: nel caso di bacino poco profondo lo smorzamento invece è dominato dall'attrito sul fondo: quindi per $\lambda \gg h$ si deve fare un calcolo che tenga conto dello strato limite e si trova $\gamma = \frac{1}{2h} (\omega \nu / 2)^{\frac{1}{2}}$.

Un esempio (drammatico) di onda con $\lambda \gg h$ è lo tsunami, con $\lambda \sim 10$-100 km (contro $h \sim 4$-5 km degli oceani) e una velocità di propagazione $v_g = \sqrt{gh} \sim 200$ m/s molto elevata, che combinata con la crescita di ampiezza delle onde nell'arrivare sul largo (10-100 cm) a riva (vari metri) corrisponde a flusso di energia (= danni) enorme. Con questi numeri, $1/\gamma$ è molto grande, così che lo tsunami può fare il giro del globo più volte prima di spegnersi!

---

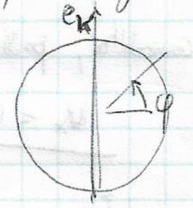
* = teorema generale della meccanica; si pensi a un semplice pendolo, è facile vedere come E_k e E_{pot} oscillino sfasate (una nulla quando l'altra è max) convertendosi completamente l'una nell'altra

Ekman layer

L'oceanografo Fridtjof Nansen osservò, durante la sua spedizione nell'Artide verso fine '800, che gli iceberg non andavano alla deriva lungo la direzione del vento, ma con un angolo verso destra rispetto a tale direzione. Vagn Walfrid Ekman mostrò nel suo lavoro di dottorato come questo fosse imputabile all'azione della forza di Coriolis, ovvero della rotazione terrestre. Prende così il nome di "Ekman layer" uno strato di fluido in cui vi è un bilancio di forze che include il drag viscoso (che in realtà è perlopiù in regime turbolento), la forza di Coriolis e il gradiente di pressione.

Il fenomeno si presenta sulla superficie libera degli oceani, a causa del vento (che oltre a poter stimolare fenomeni ondulatori, ovvero onde di superficie, può dar luogo a correnti superficiali nel caso in cui mantenga una direzione regolare); può anche occorrere nella parte bassa dell'atmosfera o al fondo di un oceano, quando il moto del fluido eserciti attrito su di una superficie rugosa. Consideriamo il primo tipo.

Data la rotazione terrestre con frequenza angolare $\bar{\omega} = \omega \hat{e}_K$, e detto $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ l'angolo di latitudine, la forza di Coriolis per unità $\bar{f}_c$ su di un fluido con velocità $\bar{v}$ è $\bar{f}_c = 2\bar{v} \times \bar{\omega}$; calcolando la forza a una latitudine φ e definendo



$f = 2\omega \sin\varphi$ parametro di Coriolis $\Rightarrow$

$$f_{cx} = +f v_y$$
$$f_{cy} = -f v_x$$

(con x, y nel piano orizzontale locale, cioè superficie marina, e z verticale)

Se linearizziamo le equazioni di bilancio del momento (che significa scrivere l'eq. di Navier-Stokes includendo Coriolis e trascurando il termine convettivo $(\bar{v} \cdot \text{grad})\bar{v}$ non lineare), abbiamo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_x}{\partial t} = f v_y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \tilde{\nu} \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \\[2ex] \dfrac{\partial v_y}{\partial t} = -f v_x - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} + \tilde{\nu} \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \\[2ex] \phi = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} - g \end{cases}$$

(del resto stiamo trattando una corrente uniforme sul piano orizzontale, per cui $\bar{v} = f(z)$, $v_z = \phi$ $\Rightarrow (\bar{v} \cdot \text{grad})\bar{v} = \phi$, $\nabla^2 \bar{v} = \partial^2 \bar{v}/\partial z^2$)

e per il caso stazionario e in assenza di gradienti orizzontali di p si semplifica il sistema a

$$\begin{cases} \tilde{\nu} \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + f v_y = 0 \\[2mm] \tilde{\nu} \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} - f v_x = 0 \end{cases}$$

Nota: con $\tilde{\nu}$ o $\tilde{\eta} = \rho\tilde{\nu}$ intendiamo che la viscosità non è la solita, in realtà il rimescolamento turbolento del fluido impone l'uso della cosiddetta "eddy viscosity", ovvero di una viscosità turbolenta molto maggiore; ciò comporta uno spessore molto maggiore dell'Ekman layer, come vediamo tra poco.

Derivando due volte in z la prima eq. e così eliminando v_y si ha

$$\frac{\partial^4 v_x}{\partial z^4} = -\left(\frac{f}{\tilde{\nu}}\right)^2 v_x$$

e definiamo $\varepsilon \doteq \sqrt{2\tilde{\nu}/|f|} = \sqrt{\tilde{\nu}/\omega\sin|\varphi|}$; la soluzione generale è della forma

$$v_x \sim e^{\pm z/\varepsilon} e^{\pm i z/\varepsilon}$$

di cui si esclude $e^{-z/\varepsilon}$ con la b.c. in $z \to -\infty$, per limitatezza a grande profondità.

Se stabiliamo che la velocità superficiale ($z = 0$) sia $\bar{u}_0$ e poniamo il s.d.r. / $\bar{u}_0 \parallel \hat{e}_x$, per comodità, possiamo scrivere la soluzione nella forma

$$v_x = u_0 e^{z/\varepsilon} \cos(z/\varepsilon)$$

che inserita in $\tilde{\nu}\partial^2_{zz} v_x + f v_y = 0$ dà, con un po' di algebra,

$$f v_y = \frac{2\tilde{\nu} u_0}{\varepsilon^2} e^{z/\varepsilon} \sin(z/\varepsilon) \Rightarrow v_y = \frac{2\tilde{\nu}}{f}\frac{|f|}{2\tilde{\nu}} e^{z/\varepsilon} \sin(z/\varepsilon) = \frac{\sin|\varphi|}{\sin\varphi} u_0 e^{z/\varepsilon} \sin(z/\varepsilon)$$

La soluzione

$$\begin{cases} v_x = u_0 e^{z/\varepsilon} \cos(z/\varepsilon) \\[2mm] v_y = \dfrac{\sin|\varphi|}{\sin\varphi} u_0 e^{z/\varepsilon} \sin(z/\varepsilon) \end{cases}$$

ha perciò attenuazione sulla scala ε e inoltre il vettore $\bar{v}$ ha un angolo ϑ rispetto a $\hat{e}_x$ /

$$\tan\vartheta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\sin|\varphi|}{\sin\varphi} \tan(z/\varepsilon)$$

che dipende dalla profondità: $\vartheta = \pm z/\varepsilon$ e con segno che dipende dall'emisfero nord o sud!

Il vettore velocità ruota e decresce in ampiezza andando dalla superficie verso la profondità dell'oceano, annullandosi su una scala spaziale $\sim \varepsilon$ ("Ekman spiral"). Si può definire una velocità media della corrente superficiale nello strato ε come

$$\langle \bar{v} \rangle = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{0} \bar{v}\, dz \simeq \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{0} \bar{v}\, dz \quad (\bar{v} \to 0 \text{ per } z < -\varepsilon);$$

in componenti,

$$\langle v_x \rangle = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\phi} u_0 e^{z/\varepsilon}\cos(z/\varepsilon)\,dz = u_0\left[\frac{1}{2}e^{z/\varepsilon}\left[\sin(z/\varepsilon)+\cos(z/\varepsilon)\right]\right]_{-\infty}^{\phi} =$$

$$= u_0\left[\frac{1}{2}\sin(\phi)+\cos(\phi)\right] = \frac{1}{2}u_0$$

$$\langle v_y \rangle = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\phi} \frac{\sin|\varphi|}{\sin\varphi} u_0 e^{z/\varepsilon}\sin(z/\varepsilon)\,dz = \frac{\sin|\varphi|}{\sin\varphi}u_0\left[\frac{1}{2}e^{z/\varepsilon}\left[\sin(z/\varepsilon)-\cos(z/\varepsilon)\right]\right]_{-\infty}^{\phi} =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\sin|\varphi|}{\sin\varphi}u_0$$

perciò $\langle \bar{v} \rangle$ ha un angolo ϑ' rispetto a $\hat{e}_x$ /

$$\operatorname{tg}\vartheta' = \langle v_y \rangle / \langle v_x \rangle = -\frac{\sin|\varphi|}{\sin\varphi} = \mp 1 \Rightarrow \vartheta' = \mp\pi/4 \text{ dipendentemente dall'emisfero}$$

Lo sforzo tgziale sulla superficie, imposto dal vento, e'

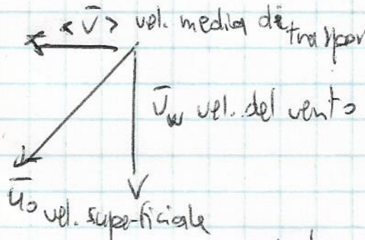
$$\sigma_{zx} = \tilde{\eta}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\Big|_{z=\phi} = \tilde{\eta}u_0\left(\frac{1}{\varepsilon}e^{z/\varepsilon}\cos(z/\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon}e^{z/\varepsilon}\sin(z/\varepsilon)\right)\Big|_{z=\phi} = \tilde{\eta}u_0/\varepsilon$$

$$\sigma_{zy} = \tilde{\eta}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\Big|_{z=\phi} = \tilde{\eta}u_0\frac{\sin|\varphi|}{\sin\varphi}\left(\frac{1}{\varepsilon}e^{z/\varepsilon}\sin(z/\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}e^{z/\varepsilon}\cos(z/\varepsilon)\right)\Big|_{z=\phi} = \tilde{\eta}u_0/\varepsilon\,\frac{\sin|\varphi|}{\sin\varphi}$$

da cui similmente a prima si ricava l'angolo ϑ_w del vento rispetto a $\hat{e}_x$ direzione della velocita' superficiale $\bar{u}_0$

$$\operatorname{tg}\vartheta_w = \langle\sigma_{zy}\rangle / \langle\sigma_{zx}\rangle = \frac{\sin|\varphi|}{\sin\varphi} = \pm 1 \Rightarrow \vartheta_w = \pm\pi/4 \text{ dipendentemente dall'emisfero}$$

Per esempio nell'emisfero boreale si avrebbe quindi una situazione come in figura, supponendo vento da nord:



che e' la situazione della costa californiana, con vento da nord ~ lungo la costa e $\Rightarrow$ $\langle \bar{v} \rangle$ trasporta acqua più calda superficiale verso il largo, con affioramento di strato più freddo da sotto e due conseguenze: (1) nebbia, (2) la flora profonda portata su favorisce una ricca fauna (pesci e uccelli pescatori).