Derivata sostanziale degli integrali di volume

Dato un continuo e presa una regione $R(t)$ che al tempo t è occupata da parte di questo continuo, consideriamo una grandezza estensiva che prende il valore $\mathcal{F}(t)$ sul volume $R(t)$; la grandezza per unità di volume associata a $\mathcal{F}(t)$ sia chiamata $F(\bar{x}(t), t)$, ovvero vale

$$\mathcal{F}(t) = \int_{R(t)} F(\bar{x}(t), t)\, d^3x$$

$\mathcal{F}(t)$ dipende dal tempo sia esplicitamente, sia implicitamente perché seguendo il continuo nel suo moto naturale, $R(t)$ evolve nel tempo. La derivata temporale di $\mathcal{F}(t)$ è $\Rightarrow$ una derivata sostanziale. Si dimostra che

$$\frac{D}{Dt}\mathcal{F}(t) = \int_{R(t)} \left[\frac{D}{Dt} F(\bar{x}(t), t) + F(\bar{x}(t), t)\, \mathrm{div}\, \bar{v}(\bar{x}(t), t) \right] d^3x =$$

$$= \int_{R(t)} \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \mathrm{div}\left(F(\bar{x}, t)\, \bar{v}(\bar{x}, t) \right) \right] d^3x$$

termine legato alla variazione di R nel tempo

Dim.: per definizione di derivata e di $\mathcal{F}(t)$

$$\frac{D\mathcal{F}(t)}{Dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{R(t+\Delta t)} F(\bar{x}(t+\Delta t), t+\Delta t)\, d^3x - \int_{R(t)} F(\bar{x}(t), t)\, d^3x \right]$$

Detto $\bar{x}' \doteq \bar{x}(t+\Delta t)$, al primo ordine in t si può scrivere $\bar{x}' = \bar{x}'(\bar{x}) = \bar{x} + \bar{v}\Delta t$

Rielaboriamo dunque il primo integrale, fatto a $t+\Delta t$ su $R(t+\Delta t)$:

$$\int_{R(t+\Delta t)} F(\bar{x}(t+\Delta t), t+\Delta t)\, d^3x = \int_{R'} F(\bar{x}', t+\Delta t)\, d^3x' = \rightarrow$$ usando il teorema del cambio di variabile $\bar{x}' \to \bar{x}$ $\longrightarrow$

$$= \int_{R} F(\bar{x}'(\bar{x}), t+\Delta t)\, \underbrace{|J(x'|x)|}\, d^3x = \int_{R} F(\bar{x} + \bar{v}(\bar{x}, t)\Delta t, t+\Delta t)\, |J(x'|x)|\, d^3x$$

con $\bar{x}'$ sviluppato al I ordine

$J(x'|x)$ = Jacobiano della trasformazione; usando sempre $\bar{x}' = \bar{x} + \bar{v}\Delta t$,

$$|J(x'|x)| = \det\left(\frac{\partial x_i'}{\partial x_j}\right) = \det\left(\delta_{ij} + \frac{\partial v_i(\bar{x},t)}{\partial x_j}\Delta t\right) \underset{\uparrow}{=} 1 + \Delta t \, \mathrm{Tr} \frac{\partial v_i(\bar{x},t)}{\partial x_j} = \rightarrow$$

sfruttando $\det(\mathbb{1} + \phi \underline{\underline{A}}) = 1 + \phi \, \mathrm{Tr}(\underline{\underline{A}})$ se $\phi \,(= \Delta t)$ è infinitesimo

$$\rightarrow = 1 + \Delta t \frac{\partial v_i(\bar{x},t)}{\partial x_i} = 1 + \Delta t \, \mathrm{div}(\bar{v}(\bar{x},t))$$

Per l'espressione già nota del differenziale $DF(\bar{x}(t),t)$, si può scrivere al primo ordine in t

$$F(\bar{x}(t+\Delta t), t+\Delta t) = F(\bar{x}(t),t) + \frac{D}{Dt} F(\bar{x}(t),t)\Delta t$$

e in definitiva riscriviamo la derivata totale di $\mathcal{F}(t)$:

$$\frac{D\mathcal{F}(t)}{Dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[\int_{R(t+\Delta t)} F(\bar{x}(t+\Delta t), t+\Delta t)\, d^3x - \int_{R(t)} F(\bar{x}(t),t)\, d^3x\right] =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left\{\int_{R(t)} \left[F(\bar{x}(t),t) + \Delta t \frac{DF(\bar{x}(t),t)}{Dt}\right]\left[1 + \Delta t \, \mathrm{div}(\bar{v}(\bar{x}(t),t))\right] d^3x - \int_{R(t)} F(\bar{x}(t),t)\, d^3x\right\} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left\{\int_{R(t)}\left[F(\bar{x}(t),t)\,\mathrm{div}(\bar{v}(x,t))\,\Delta t + \frac{DF(\bar{x}(t),t)}{Dt}\Delta t + \cancel{\frac{DF(\bar{x}(t),t)}{Dt}\mathrm{div}(\bar{v}(\bar{x}(t),t))(\Delta t)^2}\right] d^3x\right.$$

trascurabile perché secondo ordine in Δt

$$= \int_{R(t)} \left[\frac{DF(\bar{x}(t),t)}{Dt} + F(\bar{x}(t),t)\,\mathrm{div}[\bar{v}(\bar{x}(t),t)]\right] d^3x = \text{esplicitando } DF/Dt \rightarrow$$

$$= \int_{R(t)}\left[\frac{\partial F(\bar{x},t)}{\partial t} + \underbrace{(\bar{v}\cdot \mathrm{grad})F(\bar{x},t) + F(\bar{x},t)\,\mathrm{div}\,\bar{v}}_{\mathrm{div}(F\bar{v})}\right] d^3x = \int_{R(t)} \frac{\partial F(\bar{x}(t),t)}{\partial t} + \mathrm{div}\left[F(\bar{x}(t),t)\,\bar{v}(\bar{x}(t),t)\right] d^3x$$

L'espressione ha validità generale $\forall$ grandezza estensiva F. Il primo e fondamentale risultato è l'applicazione $F = \rho$ densità e la conseguente equazione di continuità (conservazione della massa).

Equazione di continuità - condizione analitica di incomprimibilità

Presa una porzione di continuo racchiusa in una regione $R(t)$ al tempo t, seguendola nel suo moto naturale sappiamo che la massa M verrà conservata. Dato il legame con la densità $\rho(\bar{x},t)$ diciamo quindi

$$M(t) = \int_{R(t)} \rho(\bar{x}(t),t)\, d^3x = \text{costante},$$

ovvero seguendo l'evoluzione naturale della porzione nella $R(t)$

$$\frac{DM(t)}{Dt} = \phi \qquad \text{che vuol dire}$$

$$\frac{D}{Dt}\int_{R(t)} \rho(\bar{x}(t),t)\, d^3x = \int_{R(t)}\left[\frac{\partial \rho(\bar{x},t)}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho(\bar{x},t)\,\bar{v}(\bar{x},t)\right)\right] d^3x = \phi$$

Data l'arbitrarietà con cui possiamo prendere $R(t)$, l'integranda deve essere nulla:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\bar{v}) = \phi} \qquad \text{EQ. DI CONTINUITÀ}$$

che si può anche scrivere, come visto,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div}(\bar{v}) = \phi \qquad \text{o} \qquad \frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = -\operatorname{div}(\bar{v}) \qquad \text{o} \qquad \frac{1}{v}\frac{Dv}{Dt} = \operatorname{div}(\bar{v})$$

con $v \doteq \frac{1}{\rho}$ volume specifico (volume per udM)

Se ne ricava la condizione di incomprimibilità (ρ = costante):

$$\operatorname{div}(\bar{v}) = \phi$$

Nota: sempre sfruttando la legge per la derivazione degli integrali di volume se

$F(\bar{x},t) = 1$ si ha $F(t) = \int_R 1 \cdot d^3x = V$ volume della regione R e

$$\frac{DV}{Dt} = \int_{R(t)}\left[\frac{\partial}{\partial t}(1) + \operatorname{div}(1\cdot\bar{v})\right] d^3x = \int_{R(t)} \operatorname{div}(\bar{v})\, d^3x = \int_{\partial R(t)} \bar{v}\cdot\hat{n}\, da$$

dove $\partial R(t)$ è la superficie che racchiude $R(t)$, con $\hat{n}$ versore normale uscente, questo ci dice che la variazione di volume di un continuo nel tempo è data dal flusso di velocità attraverso il contorno del volume stesso.

Leggi in forma integrale e locale

Le leggi della fisica vengono espresse in forma integrale oppure in forma locale. È importante chiarire il legame tra queste due forme, che risultano, come ovvio, equivalenti.

Una legge in forma integrale, per quanto concerne l'approccio seguito qui, prevede l'uguaglianza tra la derivata sostanziale di un integrale, e dall'altra parte un altro integrale.

Esempio: scriviamo la prima eq. cardinale della dinamica per una porzione di continuo di densità $\rho(\bar{x},t)$ contenuta nella regione $R(t)$, sotto posta a forze la cui risultante è $\bar{F}(t)$. L'eq. è

$$\frac{D}{Dt}\int_{R(t)} \rho(\bar{x},t)\bar{v}(\bar{x},t)\, d^3x = \bar{F}$$

A sua volta possiamo esprimere $\bar{F}$ usando $\bar{f}$ = forza per udM e integrando $\rho\bar{f}$ (che ⇒ è una forza per unità di volume, udV) sul volume $R(t)$:

$$\bar{F}(t) = \int_{R(t)} \rho(\bar{x},t)\, \bar{f}(\bar{x},t)\, d^3x \qquad \text{da cui}$$

$$\frac{D}{Dt}\int_{R(t)} \rho(\bar{x},t)\bar{v}(\bar{x},t)\, d^3x = \int_{R(t)} \rho(\bar{x},t)\,\bar{f}(\bar{x},t)\, d^3x$$

Il primo integrale, poiché ρ soddisfa l'eq. di continuità, risulta scrivibile in altra maniera (lo vediamo appena sotto più in generale):

$$\frac{D}{Dt}\int_{R(t)} \rho\bar{v}\, d^3x = \int_{R(t)} \rho\frac{D\bar{v}}{Dt}\, d^3x \Rightarrow = \int_{R(t)} \rho\bar{f}\, d^3x$$

e dato che $R(t)$ è una regione arbitraria, devono essere uguali le funzioni integrande (e per $\rho \neq \phi$ la si può semplificare) ⇒

$$\frac{D\bar{v}}{Dt} = \bar{f}$$

che esprime la stessa legge integrale in forma locale, tra grandezze per udM ($\bar{f}$ = $\bar{F}$ per udM; $\bar{v}$ = quantità di moto per udM).

Come accennato, il risultato e' generalizzabile. Prendiamo infatti una grandezza estensiva g, grandezza per udM, =>

$$\frac{D}{Dt}\int_R \rho g\, d^3x = \int_R \left[\frac{\partial(\rho g)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho g \bar{v})\right] d^3x =$$

$$= \int_R \left[\rho \frac{\partial g}{\partial t} + g\frac{\partial \rho}{\partial t} + g \operatorname{div}(\rho\bar{v}) + \rho\bar{v}\cdot \operatorname{grad} g\right] d^3x =$$

$$= \int_R \left\{ g \underbrace{\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\bar{v})\right]}_{=0 \text{ per l'eq. di continuita'}} + \rho \underbrace{\left[\frac{\partial g}{\partial t} + (\bar{v}\cdot \operatorname{grad}) g\right]}_{\doteq Dg/Dt} \right\} d^3x$$

$$\Rightarrow \frac{D}{Dt}\int_R \rho g\, d^3x = \int_R \rho \frac{Dg}{Dt} d^3x$$

Quindi se $\exists\, h$ grandezza per udM / $\exists$ una legge integrale

$$\frac{D}{Dt}\int_R \rho g\, d^3x = \int_R \rho h\, d^3x \quad \Rightarrow \quad \int_R \rho \frac{Dg}{Dt} d^3x = \int_R \rho h\, d^3x \quad \Rightarrow$$

=> questa e' equivalente alla legge locale

$$\frac{D}{Dt} g = h$$

Nota: si osservi che troviamo un legame tra la derivata parziale di una grandezza per udV, $\underline{\rho g}$, e la derivata sostanziale della stessa grandezza per udM, $\underline{g}$,

$$\frac{\partial(\rho g)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho g \bar{v}) = \rho \frac{Dg}{Dt}$$

Derivata sostanziale degli integrali di linea

Si dimostra che data una curva $\gamma(t)$, che rappresenta un insieme di pt del continuo in moto naturale, e quindi curva che dipende dal tempo, presa la grandezza $f(\bar{x},t)$

$$\frac{D}{Dt}\int_{\gamma(t)} f(\bar{x},t)\,ds_i = \int_{\gamma(t)}\left(f\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{D}{Dt}f\delta_{ij}\right)ds_j$$

dove ds_i è la i-esima componente dello spostamento $d\bar{x}$ lungo la curva e v_i la comp. i-esima della velocità $\bar{v}$.

Dimostrazione: γ è una funzione a valori in $\mathbb{R}^3$ definita su un intervallo $[a,b]$ della retta reale; la si può parametrizzare in vari modi equivalenti con un parametro corrente $\alpha \in [a,b]$ che in a e b dà gli estremi della curva.

Scegliamo quindi una parametrizzazione, che si esprime con $\bar{x}=\bar{x}(\alpha)$, di $\alpha\in[a,b]$, funzione regolare di componenti i-esime $x_i(\alpha)$; l'integrale di linea è definito dall'integrale di Riemann ordinario su $[a,b]$

$$\int_\gamma f(\bar{x})\,ds_i = \int_a^b f(\bar{x}(\alpha))\frac{dx_i(\alpha)}{d\alpha}\,d\alpha$$

la cui derivata sostanziale è

$$\frac{D}{Dt}\int_{\gamma(t)} f(\bar{x},t)\,ds_i = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\int_{\gamma(t+\Delta t)} f(\bar{x},t+\Delta t)\,ds_i - \int_{\gamma(t)} f(\bar{x},t)\,ds_i\right]$$

(si noti che γ varia essa stessa)

Scegliamo una parametrizzazione opportuna: al tempo t $\bar{x}=\bar{x}(\alpha,t)$, e al tempo $t+\Delta t$ in modo che al valore di α corrisponda $\bar{x}(\alpha,t+\Delta t)$ = evoluto temporale del pt $\bar{x}$ della curva, a tempo t, $\bar{x}(\alpha,t)$ dato dallo stesso α.

In questo modo, vale al primo ordine in Δt

$$\bar{x}(\alpha,t+\Delta t) = \bar{x}(\alpha,t) + \bar{v}(\bar{x}(\alpha,t))\,\Delta t$$

e rielaboriamo la differenza tra integrali

$$\int_{\gamma(t+\Delta t)} f(\bar{x}, t+\Delta t)\, ds_i - \int_{\gamma(t)} f(\bar{x}, t)\, ds_i =$$ applicando la parametrizzazione

$$= \int_a^b f(\bar{x}(\alpha, t+\Delta t), t+\Delta t) \underbrace{\frac{dx_i(\alpha, t+\Delta t)}{d\alpha}}_{\text{passando per } \bar{x}(\alpha,t)} d\alpha - \int_a^b f(\bar{x}(\alpha,t), t) \frac{dx_i(\alpha,t)}{d\alpha} d\alpha =$$

$$= \int_a^b f(\bar{x}(\alpha, t+\Delta t), t+\Delta t) \frac{\partial x_i(\alpha, t+\Delta t)}{\partial x_j(\alpha,t)} \frac{dx_j(\alpha,t)}{d\alpha} d\alpha - \int_a^b f(\bar{x}(\alpha,t), t) \underbrace{\frac{dx_i(\alpha,t)}{d\alpha}}_{= \frac{dx_j(\alpha,t)}{d\alpha}\delta_{ij}} d\alpha =$$

$$= \int_a^b \left[f(\bar{x}(\alpha, t+\Delta t), t+\Delta t) \frac{\partial x_i(\alpha, t+\Delta t)}{\partial x_j(\alpha,t)} - f(\bar{x}(\alpha,t),t)\,\delta_{ij} \right] \frac{dx_j(\alpha,t)}{d\alpha} d\alpha =$$

* poiché $\frac{D}{Dt} f(\bar{x}(\alpha,t),t) = \frac{1}{\Delta t}\left[f(\bar{x}(\alpha,t+\Delta t), t+\Delta t) - f(\bar{x}(\alpha,t),t) \right]$

possiamo scrivere

$$f(\bar{x}(\alpha,t+\Delta t), t+\Delta t) = f(\bar{x}(\alpha,t),t) + \Delta t \frac{D}{Dt} f(\bar{x}(\alpha,t),t)$$

* $\frac{\partial}{\partial x_j}(x_i(\alpha, t+\Delta t)) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[x_i(\alpha,t) + v_i(\bar{x}(\alpha,t))\Delta t \right] = \delta_{ij} + \frac{\partial v_i(\bar{x}(\alpha,t))}{\partial x_j}\Delta t$

$$= \int_a^b \left\{ \left[f(\bar{x}(\alpha,t),t) + \frac{D}{Dt} f(\bar{x}(\alpha,t),t)\Delta t \right] \left(\delta_{ij} + \frac{\partial v_i(\alpha,t)}{\partial x_j}\Delta t \right) - f(\bar{x}(\alpha,t),t)\,\delta_{ij} \right\} \frac{dx_j(\alpha,t)}{d\alpha} d\alpha =$$

$$= \int_a^b \left[\cancel{f(\bar{x}(\alpha,t),t)\delta_{ij}} + f(\bar{x}(\alpha,t),t)\frac{\partial v_i(\alpha,t)}{\partial x_j}\Delta t + \frac{Df(\bar{x}(\alpha,t),t)}{Dt}\Delta t\,\delta_{ij} + \underbrace{\frac{Df(\bar{x}(\alpha,t),t)}{Dt}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\Delta t)^2}_{\text{trascuriamo in quanto } \sim (\Delta t)^2} - \cancel{f(\bar{x}(\alpha,t),t)\delta_{ij}} \right] \frac{dx_j(\alpha,t)}{d\alpha} d\alpha =$$

$$= \int_a^b \Delta t \left[\frac{D}{Dt} f(\bar{x}(\alpha,t),t)\,\delta_{ij} + f(\bar{x}(\alpha,t),t)\frac{\partial v_i(\alpha,t)}{\partial x_j} \right] \frac{dx_j(\alpha,t)}{d\alpha} d\alpha \quad \rightarrow \; = ds_j$$

Dividendo per Δt e al limite $\Delta t \to 0$ abbiamo la $\frac{D}{Dt}\int_\gamma f\, ds_i$:

(finalmente abbiamo tutto espresso al tempo t)

$$\frac{D}{Dt}\int_{\gamma(t)} f(\bar{x},t)\,ds_i = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\int_{\gamma(t+\Delta t)} f(\bar{x},t+\Delta t)\,ds_i - \int_{\gamma(t)} f(\bar{x},t)\,ds_i\right] =$$

$$= \int_{\gamma(t)}\left[f(\bar{x},t)\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{D}{Dt}f(\bar{x},t)\,\delta_{ij}\right]ds_j$$

Note: * poiché $\partial v_i/\partial x_j\, ds_j = \partial_j v_i\, ds_j = dv_i$, si può anche esprimere il risultato come

$$\frac{D}{Dt}\int_{\gamma(t)} f(\bar{x},t)\,ds_i = \underbrace{\int_{\gamma(t)} f(\bar{x},t)\,dv_i}_{\text{variazione della curva}} + \underbrace{\int_{\gamma(t)}\frac{D}{Dt}f(\bar{x},t)\,ds_i}_{\text{variazione della } f}$$

* Se $f = f_i$ componente i-esima di una grandezza vettoriale $\bar{f}$, saturando su i

$$\frac{D}{Dt}\int_{\gamma(t)} \bar{f}\cdot d\bar{x} = \int\left(f_i\,\partial_j v_i + \frac{D}{Dt}f_i\,\delta_{ij}\right)ds_j = (a),(b) \qquad (f_i\,\delta_{ij}\,ds_j = f_i\,ds_i)$$

$$(a) = \int_{\gamma(t)} f_i\,dv_i + \int_{\gamma(t)}\frac{D}{Dt}f_i\,dx_i = \int_{\gamma(t)}\bar{f}\cdot d\bar{v} + \int_{\gamma(t)}\frac{D}{Dt}\bar{f}\cdot d\bar{x}$$

$$(b) = \int_{\gamma(t)} f_i\,\partial_j v_i\,ds_j + \int_{\gamma(t)}\left(\partial_t f_i + v_j\,\partial_j f_i\right)ds_i = $$ scambiando i e j nel primo integrale (tanto saturano entrambi)

$$= \int_{\gamma(t)}\left(\partial_t f_i + \underbrace{f_j\,\partial_i v_j}_{} + v_j\,\partial_j f_i\right)ds_i = \qquad \left[\;= \partial_i(f_j v_j) - v_j\,\partial_i f_j\right]$$

$$= \int_{\gamma(t)}\left[\partial_t f_i + \partial_i(f_j v_j) + v_j(\partial_j f_i - \partial_i f_j)\right]ds_i$$

Sub-nota: con un po' di algebra, $[\mathrm{rot}(\bar{f})\times\bar{v}]_i = \varepsilon_{ijk}\left[\varepsilon_{j\alpha\beta}\,\partial_\alpha f_\beta\right]v_k =$

$$= \varepsilon_{kij}\,\varepsilon_{\alpha\beta j}\,\partial_\alpha f_\beta\, v_k = \left(\delta_{k\alpha}\delta_{i\beta} - \delta_{k\beta}\delta_{i\alpha}\right)\partial_\alpha f_\beta\, v_k =$$

$$= (\partial_k f_i - \partial_i f_k)\,v_k \qquad \Rightarrow \; v_j(\partial_j f_i - \partial_i f_j) = [\mathrm{rot}(\bar{f})\times\bar{v}]_i$$

$$= \int_{\gamma}\left[\partial_t f_i + \partial_i(f_j v_j) + [\mathrm{rot}(\bar{f})\times\bar{v}]_i\right]ds_i \qquad \text{ovvero vettorialmente}$$

$$\boxed{\frac{D}{Dt}\int_{\gamma(t)}\bar{f}\cdot d\bar{x} = \int_{\gamma(t)}\left[\frac{\partial\bar{f}}{\partial t} + \mathrm{grad}(\bar{f}\cdot\bar{v}) + [\mathrm{rot}\,\bar{f}\times\bar{v}]\right]\cdot d\bar{x}}$$

* Se $\bar{f} = \bar{v}$, $\displaystyle\frac{D}{Dt}\int_{\gamma(t)}\bar{v}\cdot d\bar{x} = \int_{\gamma(t)}\bar{v}\cdot d\bar{v} + \int_{\gamma(t)}\frac{D\bar{v}}{Dt}\cdot d\bar{x} = \int_{\gamma(t)} d\left(\tfrac{1}{2}v^2\right) + \int_{\gamma(t)}\frac{D\bar{v}}{Dt}\cdot d\bar{x} \overset{!}{=} \int_{\gamma(t)}\frac{D\bar{v}}{Dt}\cdot d\bar{x}$ (se γ curva chiusa)