Stabilità/instabilità

Quando accade che un sistema in uno stato stazionario o di regime, una volta perturbato, torni dopo un certo tempo alle sue proprietà iniziali (lo stesso stato stazionario o di moto/variazioni di regime), oppure che il suo stato (o dinamica a regime) sia alterato definitivamente?

Il sistema si dice stabile o instabile a seconda dell'occorrenza del primo o secondo comportamento.

Consideriamo questo problema per fluidi sottoposti a perturbazioni di ampiezza arbitraria oppure piccola, valutando quali vincoli impongono queste diverse condizioni.

Perturbazioni arbitrarie

Consideriamo un flusso viscoso incomprimibile, che ha soluzione imperturbata stazionaria con

campo di velocità $\bar{v}_s$ (con $\operatorname{div}\bar{v}_s = \phi$)

e campo di pressione p_s a fronte di una b.c. $\bar{v}\big|_{S_R} = \bar{v}_o$ sulla frontiera del dominio R.

Il disturbo, ovvero un campo $\bar{u}(t)$ dipendente dal tempo, dà una soluzione perturbata

$\bar{v} = \bar{v}_s + \bar{u}$, $p = p_s + p'$ con $\operatorname{div}\bar{v} = \phi$ e stesse b.c. $\bar{v}\big|_{S_R} = v_o$

L'eq. di Navier-Stokes per il flusso perturbato e imperturbato è, rispettivamente,

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \left[(\bar{v}_s + \bar{u})\cdot \operatorname{grad}\right](\bar{v}_s + \bar{u}) = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}(p_s + p') + \nu\nabla^2(\bar{v}_s + \bar{u})$$

$$(\bar{v}_s\cdot\operatorname{grad})\,\bar{v}_s = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p_s + \nu\nabla^2\bar{v}_s$$ e $\Rightarrow$ per sottrazione di N.-S., div e b.c.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{v}_s\cdot\operatorname{grad})\bar{u} + (\bar{u}\cdot\operatorname{grad})\bar{v}_s + (\bar{u}\cdot\operatorname{grad})\bar{u} = -\dfrac{1}{\rho}\operatorname{grad}p' + \nu\nabla^2\bar{u} \\ \operatorname{div}\bar{u} = \phi \\ \bar{u}\big|_{S_R} = \phi \leftarrow \text{b.c.} \end{cases}$$

Trattiamo ora l'energia cinetica del disturbo integrato su tutto il dominio R del flusso e valutiamone la derivata temporale così da capire se si smorza ($\Rightarrow$ stabilità) o cresce ($\Rightarrow$ instabilità).

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_R |\bar{u}|^2 d^3x = \int_R \bar{u}\cdot\frac{d\bar{u}}{dt}\,d^3x =$$

$$= -\underbrace{\int_R u_i(\partial_k u_i)v^s_k\,d^3x}_{①} - \underbrace{\int_R u_i(\partial_k v^s_i)u_k\,d^3x}_{②} - \underbrace{\int_R u_i(\partial_k u_i)u_k\,d^3x}_{③} - \underbrace{\frac{1}{\rho}\int_R u_i\partial_i p'\,d^3x}_{④} + \underbrace{\nu\int_R u_i\nabla^2 u_i\,d^3x}_{⑤}$$

e valutiamo separatamente i cinque addendi. $\quad \mathrm{div}\,\bar{v}_s = \phi$

① Poiché $\mathrm{div}(|\bar{u}|^2 \bar{v}_s) = 2u_i(\partial_k u_i) v^s_k + |\bar{u}|^2 \partial_i v^s_i = 2u_i(\partial_k u_i) v^s_k$

$$\Rightarrow \int_R u_i(\partial_k u_i) v^s_k \, d^3x = \frac{1}{2}\int_R \mathrm{div}(|\bar{u}|^2 \bar{v}_s)\, d^3x = \frac{1}{2}\int_{S_R} |\bar{u}|^2 \bar{v}_s \cdot \hat{n}\, da = \phi$$

col teor. della div

perché per le b.c. $\bar{u}\big|_{S_R} = \phi$

③ Termine formalmente identico a ① $\Rightarrow$ $(\mathrm{div}\,u = \phi)$

poiché $\mathrm{div}(|\bar{u}|^2 \bar{u}) = 2u_i(\partial_k u_i) u_k + |\bar{u}|^2 \partial_i u_i = 2u_i(\partial_k u_i) u_k$

$$\Rightarrow \int_R u_i(\partial_k u_i) u_k \, d^3x = \frac{1}{2}\int_R \mathrm{div}(|\bar{u}|^2 \bar{u})\, d^3x = \frac{1}{2}\int_{S_R} |\bar{u}|^2 \bar{u} \cdot \hat{n}\, da = \phi \quad \text{per } \bar{u}\big|_{S_R} = \phi$$

④ Anche questo si elimina in modo non dissimile:

$\mathrm{div}(p'\bar{u}) = \bar{u}\cdot \partial_i p' + p'\partial_i u_i = \bar{u}\cdot\partial_i p'$

$$\Rightarrow \int_R u_i \partial_i p' \, d^3x = \int_R \mathrm{div}(p'\bar{u})\, d^3x = \int_{S_R} p'\bar{u}\cdot\hat{n}\, da = \phi \quad \text{per } \bar{u}\big|_{S_R} = \phi$$

② Poiché di $\partial_k v^s_i$ contribuisce solo la parte simmetrica,

$$-\int_R u_i(\partial_k v^s_i) u_k \, d^3x = -\int_R u_i \frac{1}{2}(\partial_k v^s_i + \partial_i v^s_k) u_k \, d^3x$$

⑤ Si noti che

$\mathrm{div}(\mathrm{grad}|\bar{u}|^2) = \partial_k(2u_i \partial_k u_i) = 2(\partial_k u_i)(\partial_k u_i) + 2u_i \nabla^2 u_i$

ma $\displaystyle\int_R \mathrm{div}(\mathrm{grad}|\bar{u}|^2)\, d^3x = \int_{S_R} [\mathrm{grad}(|\bar{u}|^2)]\cdot\hat{n}\, da = 2\int_{S_R} u_i \partial_k u_i n_k\, da = \phi$ sempre per $\bar{u}\big|_{S_R} = \phi$

$$\Rightarrow \int_R \nu u_i \nabla^2 u_i \, d^3x = -\nu\int_R (\partial_k u_i)(\partial_k u_i)\, d^3x$$

Infine abbiamo ottenuto

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_R |\bar{u}|^2 d^3x\right] = -\int_R u_i \frac{1}{2}(\partial_k v^s_i + \partial_i v^s_k) u_k \, d^3x - \nu\int_R (\partial_k u_i)(\partial_k u_i)\, d^3x$$

Il secondo integrale ha un quadrato ed è sicuramente $\geq \phi$, e addirittura è nullo solo per $\bar{u}=\phi$, quindi è matematicamente assimilabile al quadrato di una norma, $\|\bar{u}\|$.

Il primo integrale ha anch'esso una rappresentazione matematica come valor medio di un operatore simmetrico $\underline{\underline{A}}$, con $A_{ik} = -\frac{1}{2}(\partial_k v_i^s + \partial_i v_k^s)$ da cui

valor medio $(\bar{u}, \underline{\underline{A}}\bar{u}) = -\frac{1}{2}\int_{R} u_i A_{ik} u_k \, d^3x$

$$\|\bar{u}\|^2 = \int (\partial_k u_i)(\partial_k u_i) \, d^3x$$

e riscriviamo

$$\frac{d}{dt}(E_{K\,pert}) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_{R} |\bar{u}|^2 d^3x\right] = (\bar{u}, \underline{\underline{A}}\bar{u}) - \nu \|\bar{u}\|^2$$

$\Rightarrow (\bar{u}, A\bar{u}) = \lambda(\bar{u},\bar{u})$

L'operatore $\underline{\underline{A}}$ ha eq. agli autovalori $\underline{\underline{A}}\bar{u} = \lambda\bar{u}$, con soluzioni autovalori λ_e; se $\nu > \max(\lambda_e)$, si ha la condizione di stabilità: $\frac{d}{dt}E_{K\,pert} < \phi$, l'energia cinetica del disturbo è dissipata, proprio grazie alla viscosità del flusso, e la perturbazione si smorza.

Considerando le quantità adimensionate, dato che $Re = ul/\nu$, stabilità per grande ν impone piccoli valori di Re. Per esempio, per un flusso piano di Poiseuille questa valutazione richiederebbe $Re < 66$; sperimentalmente si osservano situazioni di stabilità anche per Re molto maggiori ($10^2 - 10^3$): questo perché le perturbazioni sono relativamente piccole, non arbitrarie.

Piccole perturbazioni

Si possono fare valutazioni diverse rispetto a perturbazioni arbitrarie. Per un disturbo $\bar{u}$ piccolo, possibilmente ∞ esimo, trascuriamo il termine convettivo $\bar{u}\cdot \mathrm{grad}\,\bar{u}$ $\Rightarrow$ l'eq. di N.-S. della perturbazione diventa $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -(\bar{v}_s \cdot \mathrm{grad})\bar{u} - (\bar{u}\cdot\mathrm{grad})\bar{v}_s - \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p' + \nu\nabla^2\bar{u}$

che è lineare in $\bar{u}$: $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \underline{\underline{L}}\bar{u}$ con L operatore differenziale lineare

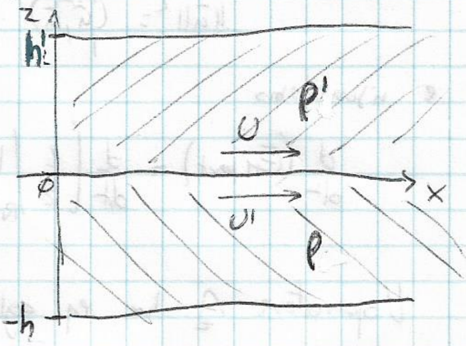
e si considerano soluzioni che sono autovalori di $\underline{\underline{L}}$: $\underline{\underline{L}}\bar{u} = \lambda\bar{u} \rightsquigarrow \bar{u}(t) = \bar{u}_0 \exp[(\gamma + i\omega)t]$

detti $\lambda = \gamma + i\omega$ autovalori complessi la cui parte reale determina la stabilità:

$$\gamma = Re(\lambda) \begin{cases} > \phi & \text{instabile} \\ < \phi & \text{stabile} \end{cases}$$

Instabilità delle discontinuità tangenziali

Riconsideriamo due strati di fluido sovrapposti - situazione già vista per le onde di gravità - e consideriamoli in caso di flusso potenziale (ideale, non viscoso) e incomprimibile tutti e due. Lo strato inferiore, di densità ρ, è inizialmente nella regione $z \in [-h, \phi]$ e quello superiore, con ρ', in $z \in (\phi, h')$. Vogliamo valutare la possibilità di instabilità quando essi non siano in quiete, ma abbiano due velocità fondamentali



(1) $\bar{u} = U\hat{e}_x$

(2) $\bar{u}' = U'\hat{e}_x$

cioè siano in scorrimento relativo

La soluzione che supponiamo y-invariante come il problema, è data da potenziali che soddisfano l'eq. di Laplace

$\nabla^2\varphi = \phi$

$\nabla^2\varphi' = \phi$ e trattiamo h_1, h_2 molto grandi $(\to\infty)$ per semplicità, con richiesta quindi di φ, φ' limitati rispettivamente per $z \to \pm\infty$.

I potenziali fondamentali sono $\varphi_0(x) = Ux$

$\varphi_0'(x) = U'x$

e impartiamo perturbazioni Φ, Φ' ai potenziali φ_0, φ_0' rispettivamente; i potenziali perturbati risultano

$\varphi(x,z,t) = \varphi_0(x) + \Phi(x,z,t) = Ux + \Phi(x,z,t)$

$\varphi'(x,z,t) = \varphi_0'(x) + \Phi'(x,z,t) = U'x + \Phi'(x,z,t)$

Rivediamo le condizioni all'interfaccia; la condizione cinematica (imposizione di fluidi a contatto, ovvero l'interfaccia non si stacca), per interfaccia esplicita è

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial\zeta}{\partial t} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial x}v_x\right|_{z=\zeta} - v_z(x,\zeta,t) = \phi \\ \left.\dfrac{\partial\zeta}{\partial t} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial x}v_x'\right|_{z=\zeta} - v_z'(x,\zeta,t) = \phi \end{cases}$$

Si noti che $v_x = \partial\varphi/\partial x = U + \partial\Phi/\partial x$

$v_x' = \partial\varphi'/\partial x = U' + \partial\Phi'/\partial x$

U, U' sono termini <u>finiti</u>, non coesimi mentre $\partial_x\Phi, \partial_x\Phi'$ infinitesimi, trascurabili nella linearizzazione

⇒ linearizzando abbiamo

$$\begin{cases} \partial_t \zeta + U \partial_x \zeta = \partial_z \phi \big|_{z=0} \\ \partial_t \zeta + U' \partial_x \zeta = \partial_z \phi' \big|_{z=0} \end{cases}$$

<u>Condizioni cinematiche linearizzate</u>

Per la condizione <u>dinamica</u> di interfaccia (ovvero richiesta di p continua all'interfaccia), scrivendo l'eq. di Bernoulli generalizzata

$$\rho g \zeta + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}\Big|_{z=\zeta} + \frac{\rho}{2}(\bar{u} + \mathrm{grad}\,\phi)^2\Big|_{z=\zeta} = \rho' g \zeta + \rho' \frac{\partial \phi'}{\partial t}\Big|_{z=\zeta} + \frac{\rho'}{2}(\bar{u}' + \mathrm{grad}\,\phi')^2\Big|_{z=\zeta}$$

Per linearizzare la condizione dinamica eliminiamo i termini ennesimi quadratici (come $|\mathrm{grad}\,\phi|^2$) e, con l'esclusione dei termini di tipo $\rho g \zeta$, approssimiamo $z=\zeta$ con $z=0$ (abbiamo già visto per le onde che è proprio il risultato di una linearizzazione), dunque otteniamo

$$\rho g \zeta + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}\Big|_{z=0} + \rho \frac{U^2}{2} + \rho U \frac{\partial \phi}{\partial x}\Big|_{z=0} = \rho' g \zeta + \rho' \frac{\partial \phi'}{\partial t}\Big|_{z=0} + \rho' \frac{U'^2}{2} + \rho' U' \frac{\partial \phi'}{\partial x}\Big|_{z=0}$$

La condizione di interfaccia per i flussi stazionari imperturbati è, a sua volta,

$$\rho g \zeta + \rho \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \frac{\rho}{2}|\mathrm{grad}\,\varphi_0|^2 = \rho' g \zeta + \rho' \frac{\partial \varphi_0'}{\partial t} + \frac{\rho'}{2}|\mathrm{grad}\,\varphi_0'|^2$$

ma $\zeta = 0$ (sup. di interfaccia imperturbata), $\partial_t \varphi_0 = \partial_t \varphi_0' = 0$; $|\mathrm{grad}\,\varphi_0|^2 = \left|\frac{\partial (U x)}{\partial x}\right|^2 = U^2$, $|\mathrm{grad}\,\varphi_0'|^2 = U'^2$

$\Rightarrow \frac{\rho}{2} U^2 = \frac{\rho'}{2} U'^2$ che inserita nella i.b.c. dinamica dei flussi perturbati dà

$$\rho g \zeta + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}\Big|_{z=0} + \rho U \frac{\partial \phi}{\partial x}\Big|_{z=0} = \rho' g \zeta + \rho' \frac{\partial \phi'}{\partial t}\Big|_{z=0} + \rho' U' \frac{\partial \phi'}{\partial x}\Big|_{z=0}$$

<u>Condizione dinamica linearizzata</u>

Ora specifichiamo perturbazioni di forma ondosa: $\phi(x,z,t) = f(z)\exp[i(kx-\omega t)]$

$$\phi'(x,z,t) = f'(z)\exp[i(kx-\omega t)]$$

e imponiamo che soddisfino l'eq. di Laplace; inserita in questa la ϕ abbiamo

$$\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2}\exp[i(kx-\omega t)] - k^2 f(z)\exp[i(kx-\omega t)] = 0$$

cioè $\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} = k^2 f(z)$ e similmente per ϕ' ⇝ $\frac{\partial^2 f'(z)}{\partial z^2} = k^2 f'(z)$

che, richiedendo limitatezza di $\phi(z \to -\infty)$, $\phi'(z \to +\infty)$ danno soluzioni

$$f(z) = A\exp(kz)$$
$$f(z) = B\exp(-kz)$$

per cui sostituendo ϕ, ϕ' nella condizione di raccordo dinamica

$$\rho g\zeta \cancel{-i\omega\rho A\exp(\phi)}\exp[i(kx-\omega t)] + ik\rho U A\exp(\phi)\exp[i(kx-\omega t)] =$$
$$= \rho' g\zeta - i\omega\rho' B\exp(\phi)\exp[i(kx-\omega t)] + ik\rho' U' B\exp(\phi)\exp[i(kx-\omega t)]$$

ed esplicitando ζ

$$\zeta = \frac{1}{g(\rho-\rho')}\left[i(U'k-\omega)\rho' B - i(Uk-\omega)\rho A\right]\exp[i(kx-\omega t)]$$

Ora ζ può essere inserita nelle condizioni cinematica all'interfaccia ottenendo, con un po' di algebra,

$$\begin{cases} A[\omega^2\rho - 2k\omega\rho U + k^2\rho U^2 - g(\rho-\rho')k] - B[-\omega^2\rho' + 2k\omega\rho'(U+U') - k^2\rho' UU'] = \phi \\ A[\omega^2\rho - k\omega\rho(U+U') + k^2\rho UU'] - B[-\omega^2\rho' + 2k\omega\rho' U' - k^2\rho' U'^2 + g(\rho-\rho')k] = \phi \end{cases}$$

sistema lineare a soluzioni non banali solo se $\det M = \phi$ con M matrice dei coefficienti di A e B; $\det M = \phi$ dà la relazione di dispersione

$$\frac{\omega}{k} = \frac{\rho U + \rho' U'}{\rho+\rho'} \pm \left[\underbrace{\frac{g(\rho-\rho')}{k(\rho+\rho')}}_{\alpha} - \underbrace{\frac{\rho\rho'}{(\rho+\rho')^2}(U-U')^2}_{\beta}\right]^{\frac{1}{2}}$$

1. la soluzione dà stabilità neutra per $\alpha > \beta$ (onde stabili).
2. Le due soluzioni $\pm[\ \ ]^{1/2}$ ci sono sempre, perciò per $[\alpha-\beta] < \phi$ si ha radice immaginaria e la soluzione con $+[\ \ ]^{1/2}$, in $\exp(-i\omega t)$ ha una parte di esponente reale positivo $\Rightarrow$ perturbazione crescente (instabilità).
3. Per $U = U' = \phi$ si ottiene la relazione di dispersione per le onde di gravità già ricavata in precedenza: $\omega^2 = gk(\rho-\rho')/(\rho+\rho')$

   e (3b) se appunto $U = U' = \phi$ ma $\rho' > \rho$, cioè fluido più pesante sopra, il radicando è negativo e si ha l'instabilità di Rayleigh-Taylor.
4. Per $U \neq U' \neq \phi$, può sempre esistere un k grande abbastanza (onde a λ corta) da avere radicando negativo e instabilità.

$\Rightarrow$ il flusso è sempre instabile per onde corte ($\uparrow k$, $\downarrow \lambda$) se c'è sufficiente differenza di velocità $U-U'$

⑤ $g = 0, \quad U \neq U'$
o
⑥ $\rho = \rho', \quad U \neq U'$

} instabilità di Helmholtz o di **Kelvin-Helmholtz**

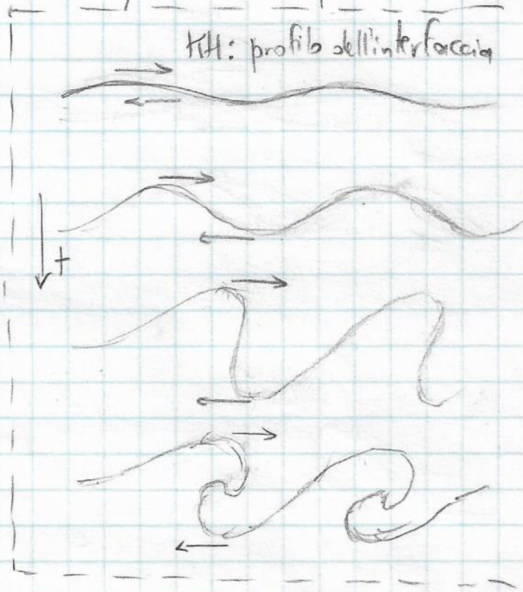
$\rho = \rho'$ dà $\boxed{\dfrac{\omega}{k} = \dfrac{1}{2}(U+U') \pm i\,\dfrac{1}{2}(U-U')}$,

e $\rho = \rho'$ significa fluido omogeneo, non sono due strati di fluidi diversi bensì strati di fluido con una <u>discontinuità di velocità</u> (VORTEX SHEET). L'instabilità avviene a tutte le lunghezze d'onda. L'onda instabile si muove con velocità di fase $\frac{\omega}{k} = \frac{1}{2}(U+U')$ velocità media del flusso fondamentale, e nel sdr di questa velocità vediamo la situazione simmetrica dei due strati che vanno con uguale velocità in verso opposto (l'onda non ha ⇒ verso di propagazione preferenziale).

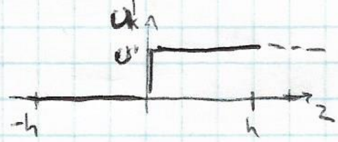
$\longrightarrow \frac{1}{2}(U-U')$

$\frac{1}{2}(U'-U) \longleftarrow$

L'instabilità di KH è generata dall'effetto destabilizzante dello shear, che riesce a sopraffare l'effetto stabilizzante della stratificazione; la sorgente di energia per l'instabilità di KH viene dall'en. cinetica dello sheared flow; le perturbazioni in pratica "spalmano" i gradienti finché non possono più crescere. Si può vedere intuitivamente questo concetto immaginando di partire da un profilo di velocità a gradino:

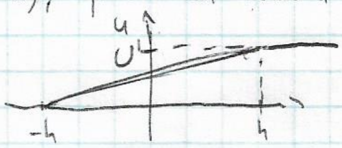


$U = 0, \; U' \neq 0$



in uno strato interessato dall'evolvere della perturbazione di spessore $2h$ ($z \in (-h, h)$)

Dopo il mixing causato dall'instabilità (cfr. fig. a destra), il profilo di velocità $u(z)$ sarà stato lisciato: $u(z) = U'\left(\frac{1}{2} + z/2h\right)$ in $z \in (-h, h)$



L'en. cinetica iniziale per unità di area trasversale sarà

$U_{K_i} = \frac{\rho}{2} U'^2 h$;

quella finale

$$U_{K_f} = \frac{\rho}{2} \int_{-h}^{h} u^2(z)\,dz = \frac{\rho}{3} U'^2 h \Rightarrow U_{K_f} < U_{K_i}$$

pure se a parità di momento, $\left(\int_{-h}^{h} u(z)\,dz = \text{costante}\right)$

U_K decresce con la decrescita del gradiente di velocità.