

## Trasporto di calore

Fin dall'inizio abbiamo notato che, per la descrizione della dinamica di un fluido, è richiesto un numero di 5 eq. scalari per poter descrivere lo stato  $(\bar{v}, p, \rho)$  del sistema, e nell'ambito dei fluidi perfetti si potevano sfruttare l'eq. di Eulero, l'eq. di continuità e quella adiabatica.

Per un fluido reale non solo l'eq. di Eulero è sostituita da quella di Navier-Stokes, ma la dissipazione introdotta dalla viscosità (e  $\rightarrow$  l'irreversibilità) impedisce di vedere la conservazione dell'entropia (eq. adiabatica), che non vale più, ovvero di considerare gli scambi termici.

### Equazione del calore nella forma dell'energia

Calcoliamo la potenza erogata dalle forze di superficie su un elemento di continuo (trattazione valida per un qualsiasi continuo, finché non si esplicitano le relazioni costitutive e la legge di Fourier).

Per convenzione sarà positivo il lavoro assorbito, mentre positivo il calore ceduto (al contrario della classica convenzione della termodinamica).

Prendi una regione  $R$  di continuo con frontiera  $S_R$ , il resto del continuo eroga una forza attraverso l'elemento di superficie  $da$  di coordinate  $\bar{x}$  e normale uscente  $\hat{n}(\bar{x})$ ; in componenti, la forza è

$$d\vec{F}_i(\bar{x}) = \sigma_{ij}(\bar{x}) \eta_j(\bar{x}) da \quad \text{ed essa fornisce una potenza}$$

$$dP(\bar{x}) = d\vec{F}_i(\bar{x}) v_i(\bar{x}) = \sigma_{ij}(\bar{x}) v_i(\bar{x}) \eta_j(\bar{x}) da \quad \text{che integrata sull'intera } S_R \text{ dà}$$

$$P = \int_{S_R} \sigma_{ij}(\bar{x}) v_i(\bar{x}) \eta_j(\bar{x}) da = \int_R \partial_j (\sigma_{ij} v_i) d^3x \quad *$$

alternativa della divergenza

Per un volume crescente, al limite si approssima l'integrale e si ha la potenza per unità  $\ell^3$ :

$$\ell^3 = \frac{P}{M} = \frac{1}{\rho} \partial_j (\sigma_{ij} v_i)$$

\* = nota che vale la pena ribadire: l'elemento di fluido è un sistema, non un pt materiale. quindi:

$$P = \sum_r \vec{F}_r^{ext} \cdot \vec{v}_r = \sum_r \vec{F}_r^{ext} (\vec{v}_r - \vec{v}_{CM}) + \sum_r \vec{F}_r^{ext} \cdot \vec{v}_{CM} = \sum_r \vec{F}_r^{ext} \cdot (\vec{v}_r - \vec{v}_{CM}) + \vec{R} \cdot \vec{v}_{CM}$$

somma sugli  $r$ -esimi costituenti del sistema, ovvero le forze esterne  $\vec{F}_r^{ext}$  che agiscono su di essi

$\Rightarrow$   $P$  non è solo  $\vec{R} \cdot \vec{v}_{CM}$  (o  $\vec{R}$  risultante delle forze ext)

Come applicate nel CM; c'è allora da considerare (primo addendo); per evitare questa ambiguità facciamo il calcolo, come esposto sopra

D'altra parte dove finisce la potenza trasferita all'elemento di continuo? Viene immagazzinata in energia meccanica ed energia interna. la variazione di en. meccanica per udl e

$$\frac{D E_{mecc}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} v^2 + u \right) = \bar{v} \cdot \frac{D \bar{v}}{Dt} + \frac{D u}{Dt} = v_i \frac{1}{\rho} \partial_j \sigma_{ij} - v_i \partial_i u + v_i \partial_i u = v_i \frac{1}{\rho} \partial_j \sigma_{ij} =$$

$$\frac{D v_i}{Dt} = \frac{1}{\rho} \partial_j \sigma_{ij} - \partial_i u \quad \frac{D u}{Dt} = \partial_i u + v_i \partial_i u$$

$$= \frac{1}{\rho} \partial_j (v_i \sigma_{ij}) - \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \partial_j v_i$$

Se appunto  $\dot{e} = \frac{D}{Dt} (E_{mecc} + E) = \frac{1}{\rho} \partial_j (\sigma_{ij} v_i)$

$\Rightarrow \frac{D E}{Dt} = \dot{e} - \frac{D E_{mecc}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \partial_j v_i$  termine di contributo all'energia interna  $E$

Per fluidi newtoniani (qui si inizia a specificare, attenzione)

$$\frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \partial_j v_i = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij}^S \dot{\epsilon}_{ij}^S + \frac{1}{\rho} \sigma_{ij}^I \dot{\epsilon}_{ij}^I =$$

oppure  $\dot{\epsilon}_{ij}^S, \dot{\epsilon}_{ij}^I$

$$= \frac{\eta}{2\rho} \sum_{ij} (\partial_j v_i + \partial_i v_j - \frac{2}{3} \text{div} \bar{v} \delta_{ij})^2 - \frac{\zeta}{\rho} (\text{div} \bar{v})^2 - \frac{1}{\rho} p \text{div} \bar{v}$$

$$\underbrace{\frac{1}{\rho} \sigma_{ij}^S \dot{\epsilon}_{ij}^S}_{\text{viscosità}} \quad \underbrace{\frac{1}{\rho} \sigma_{ij}^I \dot{\epsilon}_{ij}^I}_{\text{viscosità}} \quad \underbrace{- \frac{1}{\rho} p \text{div} \bar{v}}_{\text{potenza}}$$

Se ora passiamo a una situazione di NON EQUILIBRIO, ovvero permettiamo lo scambio di calore, riscriviamo quello che era il I principio della termodinamica come

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} v^2 + u + E \right) = \dot{e} - \dot{q} \quad \text{con } \dot{q} \text{ calore per udl ceduto dall'elemento per unito di tempo}$$

der. sostanziale dell'energia (meccanica + interna) = potenza ricevuta - calore ceduto

Esprimiamo lo scambio di calore con un vettore  $\bar{q}$  FLUSSO DI CALORE /

$$\bar{q} = \frac{1}{\rho} \text{div} \bar{q} \quad (\text{eq. di continuita per il calore})$$

$\Rightarrow$  da  $\frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} v^2 + u + E \right) = \dot{e} - \dot{q} = \frac{1}{\rho} \partial_j (\sigma_{ij} v_i) - \dot{q}$

e come prima  $\frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} v^2 + u \right) = \frac{1}{\rho} v_i \partial_j \sigma_{ij} \Rightarrow$

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \partial_j v_i - \dot{q} \quad \text{ovvero} \quad \boxed{\frac{DE}{Dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \partial_j v_i - \frac{1}{\rho} \text{div} \bar{q}}$$

eq. del calore nella forma dell'energia per udt

Ricordando l'espressione  $\frac{\partial}{\partial t}(\rho g) + \text{div}(\rho g \bar{v}) = \rho \frac{Dg}{Dt}$  con  $g$  grandezza per udt

si possono ricavare le derivate parziali temporali delle energie per unità di volume e i relativi flussi convettivi:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) = -\text{div}(\rho E \bar{v}) + \rho \frac{DE}{Dt} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} = -\text{div}(\rho E \bar{v}) + \sigma_{ij} \partial_j v_i - \text{div} \bar{q}}$$

eq. del calore nella forma dell'energia per unità di volume

e per l'energia totale

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho(E_{\text{mecc}} + E)] = -\text{div}[\rho(E_{\text{mecc}} + E) \bar{v}] + \rho \frac{D(E_{\text{mecc}} + E)}{Dt} =$$

$$= -\text{div}[\rho(E_{\text{mecc}} + E) \bar{v}] + \partial_j(\sigma_{ij} v_i) - \text{div} \bar{q} = \quad \text{con } \sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \sigma'_{ij}$$

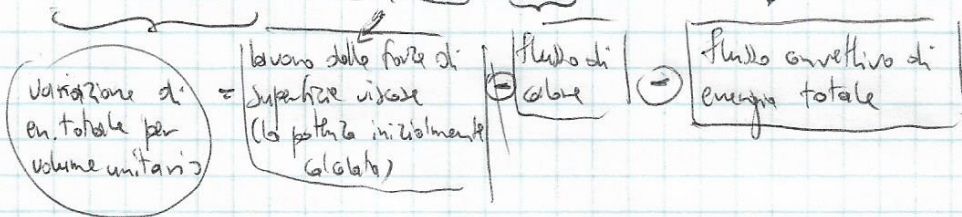
$$= -\text{div}[\rho(E_{\text{mecc}} + E) \bar{v}] - \partial_j(p \delta_{ij} v_i) + \partial_j(\sigma'_{ij} v_i) - \text{div} \bar{q} =$$

$$= -\text{div}[\rho(E_{\text{mecc}} + E) \bar{v}] - \partial_i(p v_i) + \partial_j(\sigma'_{ij} v_i) - \text{div} \bar{q} =$$

$$= -\text{div}[\rho(E_{\text{mecc}} + E + \frac{p}{\rho}) \bar{v}] + \partial_j(\sigma'_{ij} v_i) - \text{div} \bar{q}$$

↳  $w$  entalpia

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}[\rho(E_{\text{mecc}} + E)] = \underbrace{\partial_j(\sigma'_{ij} v_i)}_{\text{Flusso di calore}} - \underbrace{\text{div} \bar{q}}_{\text{Flusso convettivo di energia totale}} - \underbrace{\text{div}[\rho(E_{\text{mecc}} + w) \bar{v}]}_{\text{Flusso convettivo di energia totale}}$$



L'interpretazione è ancora più evidente integrando su di una regione  $R$  fissa:

$$\int_R \frac{\partial}{\partial t}[\rho(E_{\text{mecc}} + E)] d^3x = \frac{d}{dt} \int_R \rho(E_{\text{mecc}} + E) d^3x = \frac{d}{dt} E_{\text{tot}}(R, t) =$$

$$= - \int_R \text{div} \bar{q} d^3x - \int_R \text{div}[\rho(E_{\text{mecc}} + w) \bar{v}] d^3x + \int_R \partial_j(\sigma'_{ij} v_i) d^3x = \quad \text{col teorema della divergenza applicato a tutti gli addendi}$$

$$= \int_{S_R} \vec{q} \cdot \hat{n} da - \int_{S_R} p(E_{mech} + w) \vec{V} \cdot \hat{n} da + \int_{S_R} \sigma_{ij} v_i n_j da$$

Si noti che se  $R$  coincide col dominio  $\Rightarrow \vec{V}|_{S_R} = \vec{v}$ , per un sistema isolato in cui non c'è scambio con l'esterno  $\vec{q}|_{S_R} = 0 \Rightarrow \frac{dE_{tot}}{dt} = 0$ , l'energia totale è conservata.

$$\begin{aligned} \int_{S_R} \vec{q} \cdot \hat{n} da &= \int_{S_R} q_i n_i da = \int_{S_R} q_i \delta_{ij} n_j da \\ &= \int_{S_R} q_i n_i da = \int_{S_R} q_i n_i da \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{S_R} p(E_{mech} + w) \vec{V} \cdot \hat{n} da &= \int_{S_R} p(E_{mech} + w) v_i n_i da \\ &= \int_{S_R} p(E_{mech} + w) v_i n_i da \end{aligned}$$

$$\int_{S_R} \sigma_{ij} v_i n_j da = \int_{S_R} \sigma_{ij} v_i n_j da$$

## Equazione del calore nella forma dell'entropia

Per un elemento di continuo (che per definizione non scambia massa con l'esterno) vale

$$dE = Tds - pdv = Tds - p d\left(\frac{1}{\rho}\right) = Tds + \frac{p}{\rho^2} dp$$

che per la relazione tra i differenziali si può trasferire alle derivate sostanziali:

$$\frac{DE}{Dt} = T \frac{Ds}{Dt} - p \frac{Dv}{Dt} = T \frac{Ds}{Dt} + \frac{p}{\rho} \text{div} \bar{v} \quad \left( \frac{1}{v} \frac{Dv}{Dt} = \text{div} \bar{v} \right)$$

Sostituendovi l'espressione già nota  $\frac{DE}{Dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \partial_j v_i - \frac{1}{\rho} \text{div} \bar{q}$ , si ha

$$\begin{aligned} T \frac{Ds}{Dt} &= \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \partial_j v_i - \frac{1}{\rho} \text{div} \bar{q} + \frac{p}{\rho} \text{div} \bar{v} = \\ &= \frac{1}{\rho} (-p \delta_{ij} + \sigma_{ij}) \partial_j v_i - \frac{1}{\rho} \text{div} \bar{q} + \frac{p}{\rho} \text{div} \bar{v} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \partial_j v_i - \frac{1}{\rho} \text{div} \bar{q} \\ &\quad - \frac{p}{\rho} \delta_{ij} \partial_j v_i = - \frac{p}{\rho} \partial_i v_i = - \frac{p}{\rho} \text{div} \bar{v} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{\rho T} \sigma_{ij} \partial_j v_i - \frac{1}{\rho T} \text{div} \bar{q} \quad \text{Eq. del calore nella forma dell'entropia per udm}$$

Poiché  $\text{div} \left( \frac{\bar{q}}{T} \right) = \frac{1}{T} \text{div} \bar{q} + \bar{q} \cdot \text{grad} \left( \frac{1}{T} \right) = \frac{1}{T} \text{div} \bar{q} - \frac{\bar{q}}{T^2} \cdot \text{grad} T$

$$\frac{Ds}{Dt} = - \frac{1}{\rho} \text{div} \left( \frac{\bar{q}}{T} \right) + \frac{1}{\rho T} \sigma_{ij} \partial_j v_i - \frac{1}{\rho} \frac{\bar{q} \cdot \text{grad} T}{T^2}$$

è il termine  $dS/T$  che  
deriva dalla variazione di entropia  
nel caso reversibile

energia meccanica  
perda a favore  
di energia interna,  
divisa per  $T$ ; struttura  
dello stesso tipo di  $dS/T$  (come calore  
assorbito qui a causa delle forze  
d'attrito)

termine di contributo all'entropia che viene  
direttamente dal fatto di avere  
conduzione di calore data da gradienti di  $T$

Anche qui possiamo passare alla forma per unità di volume:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} (\rho s) &= - \text{div} (\rho s \bar{v}) + \rho \frac{Ds}{Dt} = - \text{div} (\rho s \bar{v}) + \frac{1}{T} \sigma_{ij} \partial_j v_i - \frac{1}{T} \text{div} \bar{q} = \text{ovv} \frac{1}{T} \text{div} \bar{q} = \text{div} \left( \frac{\bar{q}}{T} \right) + \frac{\bar{q} \cdot \text{grad} T}{T^2} \\ &= - \text{div} (\rho s \bar{v} + \bar{q}) + \frac{1}{T} \sigma_{ij} \partial_j v_i - \frac{\bar{q} \cdot \text{grad} T}{T^2} \end{aligned}$$

che integrata sul volume di una regione fissa  $R$  e usando il teorema della divergenza esprime

l'INTEGRALE DI CLAUSIUS

$$\frac{dS}{dt} = \int_R \frac{\partial(\rho s)}{\partial t} d^3x = \underbrace{- \int_{S_R} \rho s \vec{v} \cdot \hat{n} da}_{\text{flusso convettivo di entropia (nullo se } R = \text{dominio)}} - \underbrace{\int_{S_R} \frac{1}{T} \vec{q} \cdot \hat{n} da}_{\text{scambio di calore sull'esterno (nullo per } R = \text{dominio isolatamente isolato)}} + \underbrace{\int_R \frac{1}{T} \sigma_{ij}' \partial_j v_i d^3x - \int_R \frac{1}{T^2} (\vec{q} \cdot \text{grad} T) d^3x}_{\text{termini di PRODUZIONE DI ENTROPIA che si aggiungono alla classica disuguaglianza di Clausius}}$$

perciò anche nel caso di fluido isolato e prendendo  $R = \text{dominio}$  l'entropia non si conserva perché ci sono i termini di produzione. Affinche la variazione sia positiva (per il II principio della Termodinamica l'entropia di un sistema isolato non può diminuire) si hanno dei vincoli sugli integrali di produzione:

1)  $\sigma_{ij}' \partial_j v_i \geq 0$ ; dalla decomposizione di  $\sigma_{ij}'$  e  $\partial_j v_i = \pi_{ij}$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}' \partial_j v_i &= \sigma_{ij}' \pi_{ij} = \sigma_{ij}' \pi_{ij}^s + \sigma_{ij}' \pi_{ij}^z = \quad (\text{abbiamo considerato } \sigma_{ij}' = 0 \text{ per fluido newtoniano)} \\ &= \frac{\eta}{2} (\partial_j v_i + \partial_i v_j - \frac{2}{3} \text{div}(\vec{v}) \delta_{ij})^2 + \frac{\zeta}{3} (\text{div} \vec{v})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

e le componenti  $\sigma_{ij}'$  devono essere  $\geq 0$  separatamente  $\Rightarrow$  devono essere

$$\boxed{\eta, \zeta \geq 0} : \text{coefficienti di viscosità necessariamente positivi per fluido newtoniano}$$

2)  $\vec{q} \cdot \text{grad} T \leq 0$

Per assioma termodinamico, in processi di non equilibrio i flussi delle grandezze estensive dipendono dai gradienti delle grandezze intensive attraverso determinate leggi fenomenologiche.

Ragionando per il flusso  $\vec{q}$  della quantità estensiva calore, ipotizziamo la dipendenza dai gradienti di due grandezze termodinamiche quali  $p$  e  $T$ :  $\vec{q} = \vec{q}(p, T)$ . Più

in dettaglio, usiamo una somma di termini multilineari nei gradienti di  $p$  e  $T$  fino a un ordine  $N$  (scriviamo cioè una legge fenomenologica), su cui poi imponiamo dei vincoli perché  $\vec{q} \cdot \text{grad} T$  rispetti il II principio della Termodinamica.

Dunque, in componenti,

$$q_i = - \left( A_i^{(0,2)} + A_{ij}^{(1,2)} \partial_j T + A_{ij}^{(0,1)} \partial_j p + \right. \\ \left. + A_{ijk}^{(2,2)} \partial_j T \partial_k T + A_{ijk}^{(1,2)} \partial_j T \partial_k p + A_{ijk}^{(0,2)} \partial_j p \partial_k p + \right. \\ \left. + A_{ijkl}^{(3,2)} \partial_j T \partial_k T \partial_l T + A_{ijkl}^{(2,2)} \partial_j T \partial_k T \partial_l p + A_{ijkl}^{(1,2)} \partial_j T \partial_k p \partial_l p + A_{ijkl}^{(0,2)} \partial_j p \partial_k p \partial_l p + \dots \right)$$

con coefficienti  $A_{i_1 \dots i_r j_{m-r} \dots j_m}^{(r, m-r)}$  tensori di rango  $m+1$  con  $m \in \mathbb{N}$   
 coefficienti della forma multilineare di grado  $r$  in  $\text{grad} T$ ,  
 e di grado  $(m-r)$  in  $\text{grad} p$ .

Lo sviluppo si arresta stabilendo la piccolezza dei gradienti e dunque ignorando ciò che viene oltre un certo ordine  $N$  a cui le composizioni di gradienti sono reputate ormai trascurabili.

Costruita la legge fenomenologica, per rispettare il vincolo di produzione di entropia positiva

$$\int_{\mathcal{R}} -\frac{1}{T^2} (\bar{q} \cdot \text{grad} T) d^3x \geq \phi \quad \text{ovvero } \bar{q} \cdot \text{grad} T \text{ definita negativa,}$$

$\Rightarrow$  ciò deve valere separatamente per tutti i termini dello sviluppo. A tal fine nello sviluppo

$$A^{(0,2)} \geq \phi \quad (\text{altrimenti } \text{ce}^- - A^{(0,2)} \text{ grad} T \text{ che non è necessariamente positivo)} \quad *$$

e possono sopravvivere solo gli altri termini con potenze dispari dei  $\text{grad} T$   
 e potenze pari dei  $\text{grad} p$

$\Rightarrow$  resta una forma del tipo

$$q_i = - \left( A_{ij}^{(1,2)} \partial_j T + A_{ijk}^{(2,2)} \partial_j T \partial_k T + A_{ijkl}^{(1,2)} \partial_j T \partial_k p \partial_l p + \dots \right)$$

Se prendiamo il solo termine di 1 grado, e chiamiamo  $A_{ij}^{(1,2)} \doteq \underline{K}_{ij} \geq \phi$ , otteniamo

$$q_i = -K_{ij} \partial_j T; \text{ se } K \rightarrow K \text{ scalare (caso isotropo)}$$

$$\boxed{\bar{q} = -K \text{ grad} T} \text{ LEGGE DI FOURIER (K coeff. di conducibilità termica)}$$

⊛ Nota importante: usando la legge di Fourier, il termine di produzione di entropia è

$$-\frac{1}{T^2} \bar{q} \cdot \text{grad} T = -\frac{1}{T^2} K |\text{grad} T|^2 \propto \left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2, \text{ cioè è proporzionale al quadrato}$$

delle differenze relative di temperatura assoluta.

\* = del resto in assenza di gradienti si suppone ragionevolmente che non debba esserci flusso di calore

Perciò è vero che vediamo come la conduzione di calore sia fonte di irreversibilità, ma dobbiamo anche osservare che questa irreversibilità appare come effetto al secondo ordine nelle differenze di temperatura;

⇒ fermandoci al I ordine, lo scambio di calore è reversibile (veddi il classico scambio di calore reversibile o i termostati, come descritto generalmente in termodinamica).

⊙ Altra nota rilevante, in conclusione le proprietà del fluido viscoso e conduttore termico, in termini di quella che è la produzione di entropia ovvero della sua irreversibilità dinamica, sono racchiuse nei parametri  $\eta, \zeta, \kappa$ .



## Equazione del calore per un fluido incompressibile

Nello studio della dinamica dei fluidi abbiamo visto che per velocità  $v \ll c$  (velocità del suono), le variazioni di  $p$  e, a cascata, di altre grandezze termodinamiche come  $\rho$  sono trascurabili. Tuttavia in presenza di un riscaldamento  $\Rightarrow$  di un  $\Delta T$ ,  $p$  varia con  $T$  e nasce un problema di incompressibilità, ovvero si deve far attenzione alle variazioni di  $p$ . Per avere fluido incompressibile si richiedono piccole variazioni di  $p$  a) sotto azioni meccaniche, b) sotto sollecitazioni termiche (variazioni per dilatazione termica).

Valutiamo l'incompressibilità meccanica e cosa implica. Esprimiamo il differenziale di  $s$

$$ds(p, T) = \frac{\partial s}{\partial T} dT + \frac{\partial s}{\partial p} dp = \frac{c_p}{T} dT - \frac{\beta}{\rho} dp$$

richiedeva che il secondo termine sia trascurabile (piccole variazioni,  $\rho \approx \text{costante}$ ).

Per confronto tra i due termini, se  $|\Delta p| \ll \frac{\rho c_p}{\beta T} |\Delta T|$

$$\Rightarrow ds \approx \frac{\partial s}{\partial T} dT = \frac{c_p}{T} dT \quad \text{ovvero} \quad \frac{\partial s}{\partial T} = \frac{c_p}{T}$$

Per l'incompressibilità meccanica, scrivendo

$$\frac{1}{\rho} dp = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho(p, s)}{\partial p} dp + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho(p, s)}{\partial s} ds$$

si deve assicurare che il primo termine (proprio quello di incompressibilità meccanica: variazione di  $\rho$  dovuta a variazione di  $p$ ) sia trascurabile rispetto al secondo (che descrive la dilatazione termica).

Come già noto

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{1}{c^2} \quad ; \quad \frac{1}{\rho} |\Delta p| \sim \frac{U L}{c} \quad ; \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial s} = -\frac{\beta T}{\rho c_p} \quad ; \quad |\Delta s| \sim \frac{c_p}{T} |\Delta T|$$

$$\Rightarrow \text{imporre} \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} dp \ll \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial s} ds \quad (**)$$

$$\text{equivalente al confronto} \quad \frac{U L}{c} \frac{1}{c^2} \ll \frac{\beta T}{\rho c_p} \frac{c_p}{T} |\Delta T| \quad \Rightarrow \quad \frac{U L}{c^2} \ll \beta |\Delta T|$$

$$\text{(se } U \ll c T, (U/c)^2 \ll \beta |\Delta T|)$$

\* = cioè nel calcolo delle derivate delle grandezze termodinamiche, non prendo come  $p = \text{costante}$  si deve lavorare a  $p$  costante,  $\Rightarrow$  attenzione a considerare questa situazione.

Dalla continuità  $\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\text{div } \vec{v}$ ;

$$\left( \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \right) = \left( \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Ds} \frac{Ds}{Dt} \right) \approx \frac{\beta T}{\rho} \frac{Ds}{Dt} \approx \frac{\beta T}{\rho} \frac{c_p}{T} \Delta T \frac{U}{L} = \beta \Delta T \frac{U}{L}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \sim \beta \Delta T \frac{U}{L} \quad (a)$$

$$\text{ma anche } \text{div } \vec{v} \sim U/L \quad (b)$$

Perciò se vale (a)  $\ll$  (b), cioè  $\beta \Delta T \frac{U}{L} \ll \frac{U}{L} \Rightarrow \beta \Delta T \ll 1$

l'ordine di grandezza dei due termini nell'eq. di continuità è molto diverso e si devono annullare separatamente; o ciò  $\Rightarrow$  corrisponde  $\text{div } \vec{v} = 0$

Note:

$|\rho| \sim \rho U L / c$  e dal confronto  $|\rho| \ll \frac{\rho c_p}{\beta T} |\Delta T|$  (per trascurare comprimibilità meccanica)

$$\Rightarrow \frac{U L}{c} \ll \frac{c_p |\Delta T|}{\beta}; \text{ nel caso } U \ll \frac{c}{L}, \text{ diventa } U^2 \ll \frac{c_p |\Delta T|}{\beta}$$

Questa condizione va unita a quelle già trovate

$$\left. \begin{array}{l} U \ll c \\ L/c \ll 1 \\ \beta \Delta T \ll 1 \end{array} \right\} \text{note già dalla dinamica dei fluidi come condizioni per l'incomprimibilità meccanica}$$

Una giustificata l'approssimazione  $\frac{Ds}{Dt} = \frac{c_p}{T} \frac{DT}{Dt}$  e usando l'eq. del calore nella forma dell'entropia,

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{T}{\rho} \frac{Ds}{Dt} = \frac{T}{\rho} \left( \frac{1}{\rho T} \sigma_{ij} \rho v_i v_j - \frac{1}{\rho T} \text{div } q \right) = \frac{1}{\rho c_p} \sigma_{ij} \rho v_i v_j - \frac{1}{\rho c_p} \text{div } (-K \text{grad } T);$$

chiamato  $\chi = K/\rho c_p$  COEFFICIENTE DI DIFFUSIONE TERMICA,

e avendo calcolato  $\sigma_{ij} \rho v_i v_j$  per fluido newtoniano e incomprimibile ( $\text{div } \vec{v} = 0$ ), ovvero

$$\sigma_{ij} \rho v_i v_j = \frac{\eta}{2} (\rho v_i v_i + \text{div } v_j)^2, \text{ stendiamo}$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\eta}{2 c_p} (\rho v_i v_i + \text{div } v_j)^2 + \chi \nabla^2 T \quad \text{insieme a } \text{div } \vec{v} = 0; \text{ per fluido a riposo o solido (in sostanza, in un caso puramente conduttivo senza convezione) } \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \chi \nabla^2 T \quad \text{equazione del calore o di Fourier} \rightarrow \text{vale bene per solidi, non troppo per fluidi}$$

+ opportune b.c.; nel caso stazionario, si riduce a eq. di Laplace  $\nabla^2 T = 0$ .