Condizioni al contorno nell'equazione del calore

Le condizioni al contorno (b.c.) danno la descrizione della fisica dell'interazione tra il sistema in esame e l'esterno. Vogliamo discutere il loro significato all'interno di un problema specifico, ovvero il comportamento termico del sottosuolo, schematizzato come uno strato piano, di spessore infinito o finito, sovrastato da un'atmosfera con cui c'è appunto un'interazione da esprimere tramite le b.c. dell'equazione di Fourier, ridotta al caso monodimensionale (grandezze dipendenti dalla quota z, e invarianti in x e y). La superficie, su cui si pongono le b.c., è intesa sul piano $z=\phi$.

- Condizione di Dirichlet: significa imporre $T(z=\phi) = T_{sup}$ valore ben definito, ed è una approssimazione molto cruda, perché in realtà appunto T_{sup} non è nota, non è definita a priori.
- Condizione di Neumann: è una condizione sulla derivata normale di T, e dunque sul flusso di calore $q_z = -K \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=\phi}$; anche questa è a rigore difficile da imporre, perché si dovrebbe conoscere esattamente il flusso di calore.
- Condizione mista (detta anche di Robin): matematicamente, coinvolge sia la grandezza in esame che la sua derivata normale. Fisicamente, la costruiamo imponendo la relazione

$$\bar{q} \text{ conduttivo proveniente dal sottosuolo} = \bar{q} \text{ convettivo suolo-aria}$$

cioè

$$\left. -K \frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=\phi} = h\Big[\underbrace{T(\phi,t)}_{T_{suolo}\ (\text{incognita})} - \underbrace{T_0 \exp(-i\omega t)}_{T_{aria}}\Big] \leftarrow \text{scambio conduttivo-convettivo}$$

dove T_0 è una temperatura fondamentale dell'aria, aria la cui temperatura ha un andamento periodico (modellizzato secondo necessità: giornaliero, stagionale...; la funzione periodica potrebbe essere più complicata, e a sua volta rendere più impegnativa la soluzione).

Il flusso dal sottosuolo $q_z = -K\partial_z T|_{z=\phi}$ può essere eguagliato a un'espressione più completa, di cui il termine appena descritto è solo un addendo, se si considera la possibilità di altre forme di scambio.

* Assorbimento del flusso di calore in arrivo dal sole.

Termine peraltro dominante sul primo, è possibile approssimarlo, se si considera l'andamento stagionale (annuale), con un andamento sinusoidale per un flusso che dipende da vari fattori, tra cui sicuramente la latitudine ed è sempre un flusso assorbito (dunque termine con segno negativo al secondo membro dell'eq. di b.c. $-k\partial_z T|_{z=0} = \ldots$):

$$-Q_s f(t) = -Q_s \exp(-i\omega t + \varphi) \qquad Q_s \; ([en./t \cdot A]) \text{ valore fondamentale del flusso}$$

Nota: se parliamo di ciclo giornaliero $f(t)$ è periodica ma non sinusoidale, perché nelle ore notturne il flusso è del tutto nullo).

* Emissione radiativa di calore.

Altro termine dominante, tiene conto dell'emissione radiativa del calore accumulato dalla Terra che, con una temperatura media di 15°C, emette negli infrarossi (IR). Una prima (non buona in verità) approssimazione può essere quella di corpo nero, che dà dunque un termine di flusso positivo (in uscita dal suolo)

$$q_r = \sigma T^4(\phi, t) \qquad \text{con } \sigma = \text{costante di Stefan}$$

* Assorbimento dell'emissione radiativa.

Una parte dell'emissione radiativa può essere assorbita dall'atmosfera, dunque si ha un termine dello stesso tipo del precedente, con segno opposto:

$$q_{ass} = -\tilde{\sigma} T^4_{amb}$$

dove T_{amb} è la temperatura ambientale e $\tilde{\sigma}$ tiene conto delle proprietà ambientali. L'assorbimento del calore dalla terra, essendo questo in fascia IR, è a carico dell'umidità, cioè il vapor d'acqua e le nubi, non essendo i gas atmosferici come O_2 e N_2 in grado di emettere/assorbire negli IR. Si noti infatti che dove c'è umidità la temperatura notturna scende meno (vedansi le notti nuvolose, meno rigide di quelle limpide e asciutte) che non nel deserto, secco e senza nuvole, dove a fronte di giornate calde la T notturna può andare sotto 0°C.

Per differenze di temperatura suolo-ambiente $T(\phi,t) - T_{amb}$ relativamente modeste, la somma dei due termini si può approssimare con il solo termine lineare di uno sviluppo,

$$\Rightarrow \quad G[T(\phi,t) - T_{amb}]$$

con una costante G dipendente dalle caratteristiche della radiazione e dell'ambiente (e certamente $G \neq h$ coeff. di scambio conduttivo-convettivo).

* Calore latente

Un termine che è molto significativo solo per intervalli limitati di tempo durante la giornata, e specificamente all'alba-primo mattino e al tramonto-crepuscolo (da cui un'influenza che si estende su di uno strato di sottosuolo relativamente sottile) è quello dovuto al calore latente

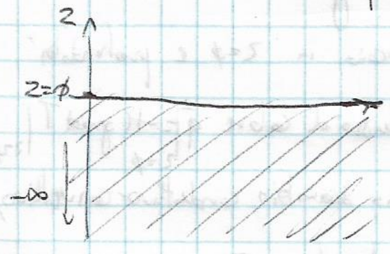
- di evaporazione, al mattino (calore sottratto al suolo → la T cala bruscamente all'alba),
- di condensazione, alla sera (calore ceduto al suolo),

ovvero legato ai fenomeni di rugiada.

Nel seguito vediamo esempi che considerano le b.c. più semplici, di Dirichlet o miste con scambio conduttivo-convettivo, e risolubili analiticamente con facilità per problemi di regime o che includono una fase transitoria, cioè con un dato iniziale (il cui effetto si smorza andando il sistema a regime).

Si noti che se consideriamo il sottosuolo come uno strato di profondità finita, servirà una b.c anche sull'interfaccia inferiore: una ragionevole ipotesi sarà supporre che vi sia un flusso geotermico, ovvero calore che l'interno caldo della Terra cede alla crosta.

Sottosuolo di profondità infinita con b.c. di Dirichlet - soluzione di regime



Consideriamo invarianza in x e y, ⇒ problema 1D di eq.

$$\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2}$$

con una condizione sull'interfaccia $z=0$ che ha un'oscillazione temporale

$$T(z=0,t) = T_0 \exp(-i\omega t)$$

e soluzione di regime che rispetta le invarianze del problema, in una forma a variabili separate:

$$T(z,t) = \psi(z) e^{-i\omega t}$$ che inserita nell'eq. di Fourier dà

$$-i\omega \psi(z) e^{-i\omega t} = \chi \frac{d^2\psi(z)}{dz^2} e^{-i\omega t}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\psi(z)}{dz^2} = -\frac{i\omega}{\chi}\psi(z) = \lambda^2 \psi(z)$$ definendo $\lambda^2 \doteq -i\omega/\chi$, che dà soluzione generale

$$T(z,t) = \left[A e^{\lambda_+ z} + B e^{\lambda_- z}\right] e^{-i\omega t}$$ con radici $\lambda_\pm = \pm\sqrt{-i\omega/\chi} = \pm(1-i)\sqrt{\omega/2\chi} = \pm(1-i)/\delta$

$(\sqrt{-i} = (1-i)/\sqrt{2})$

avendo definito $\delta \doteq \sqrt{2\chi/\omega}$ PROFONDITÀ DI SMORZAMENTO.

Per finitezza di $T(z\to-\infty,t)$ poiché $Re(\lambda_-) < 0$ e ⇒ $\lim_{z\to-\infty} \exp(-z/\delta) = \infty$, imponiamo $\boxed{B=0}$

$$\Rightarrow T(z,t) = A e^{(1-i)z/\delta} e^{-i\omega t} = A e^{z/\delta} e^{-i(z/\delta+\omega t)}$$

La b.c. in $z=0$ impone $T(0,t) = A e^{-i\omega t} = T_0 e^{-i\omega t}$ ⇒ $\boxed{A = T_0}$

e la soluzione completa è

$$T(z,t) = T_0 \underbrace{e^{z/\delta}} \underbrace{e^{-i(z/\delta+\omega t)}}$$

con uno smorzamento in profondità e sfasamento nell'oscillazione tra superficie e profondità

(T_{max} a certa profondità z anche in opposizione di fase con T superficiale)

lo sfasamento dipendente dalla profondità

risulta $z/\delta = \sqrt{\omega/2\chi}\cdot z = \phi_D$ in radianti,

oppure $\delta_D = \phi_D/\omega = z/\sqrt{2\omega\chi}$ in termini di tempo.

Sottosuolo di profondità infinita con b.c. mista - soluzione di regime

Trattiamo ancora un problema monodimensionale in z, con interfaccia in $z=\phi$ e profondità ∞ $(z \to -\infty)$, in cui però assegniamo una b.c. all'interfaccia sul flusso di calore $\vec{q} = -K \,\mathrm{grad}\, T \big|_{z=\phi}$ (che in questo caso 1D si riduce a $q_z \big|_{z=\phi} = -K \partial_z T \big|_{z=\phi}$), stabilendo uno scambio conduttivo-convettivo, ossia flusso conduttivo dal suolo = flusso ceduto convettivamente nell'atmosfera. Dunque

$$q_z = -K \frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z=\phi} = h\left(T(\phi,t) - T_0 \exp(-i\omega t)\right)$$

coeff. di scambio convettivo | T del suolo (sup. $z=\phi$) | T aria, con T_0 sua temperatura fondamentale

ipotizzando ancora soluzione a variabili separate

$T(z,t) = \psi(z)\exp(-i\omega t)$ che perciò inserita nell'eq. di Fourier dà la stessa soluzione generale (solo le b.c. che la differenzieranno!):

$$\psi(z) = A\exp[(1-i)z/\delta] + B\exp[-(1-i)z/\delta] \quad \text{con} \quad \delta = \sqrt{2\chi/\omega}$$

e nuovamente è necessario $B=\phi$ perché $T(z \to -\infty, t)$ sia finita.

Imponiamo la condizione mista in $z=\phi$ per la soluzione trovata $T(z,t) = A\exp[(1-i)z/\delta]\exp(-i\omega t)$:

$$-\frac{K(1-i)}{\delta} A\exp[(1-i)z/\delta]\bigg|_{z=\phi} \exp(-i\omega t) = h\left[A\exp(-i\omega t) - T_0\exp(-i\omega t)\right]$$

$$\Rightarrow \quad -K(1-i)A/\delta = h(A - T_0) \quad \Rightarrow \quad A[h + K(1+i)/\delta] = hT_0$$

$$\Rightarrow A = hT_0/[h + K(1-i)/\delta] = hT_0[h + K/\delta - iK/\delta] = hT_0 \frac{[(h+K/\delta) + iK/\delta]}{[(h+K/\delta)^2 + (K/\delta)^2]}$$

Scritto in forma trigonometrica (o polare che dir si voglia),

$$A = |A|e^{i\vartheta} \quad \text{con} \quad \vartheta = \mathrm{arctg}[\mathrm{Im}(A)/\mathrm{Re}(A)] = \mathrm{arctg}[(K/\delta)/(h+K/\delta)]$$

che permette di ottenere lo sfasamento complessivo nella soluzione

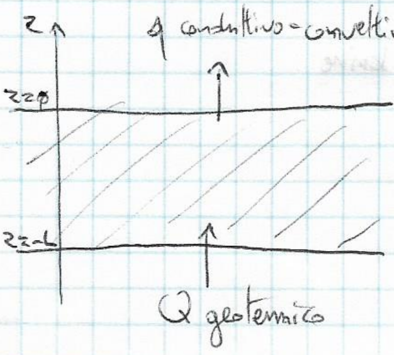
$$T(z,t) = A\exp[(1-i)z/\delta]\exp(-i\omega t) = |A|\underbrace{\exp(z/\delta)}_{\text{smorzamento}}\exp[\underbrace{-i\omega}_{\text{oscill.}}(t + \underbrace{z/\omega\delta - \vartheta/\omega}_{\text{con sfasamento}})]$$

Si noti che lo sfasamento $\delta_M = \frac{z}{\delta\omega} - \frac{\vartheta}{\omega} = \frac{z}{\sqrt{2\omega\chi}} - \frac{1}{\omega}\mathrm{arctg}\left[\frac{K/\delta}{(h+K/\delta)}\right]$

rispetto alla temperatura dell'aria è non nullo già sulla superficie $z=\phi$.

Sottosuolo di profondità finita e b.c. inferiore di flusso geotermico - soluzione di regime

Consideriamo un sottosuolo come lastra di spessore L e teniamo in conto, oltre alla condizione di scambio conduttivo-convettivo sulla superficie superiore $z=\phi$, la presenza di un flusso geotermico dall'interno della Terra sulla superficie inferiore $z=-L$, considerabile come costante. Il problema (e la soluzione cercata, di regime), con x- e y-invarianza, è



$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial t} = \chi \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2} \\ -K\dfrac{\partial T}{\partial z}\Big|_{z=\phi} = h\left[T(\phi,t) - T_0 e^{-i\omega t}\right] \\ -K\dfrac{\partial T}{\partial z}\Big|_{z=-L} = Q \end{cases}$$ con Q flusso geotermico assegnato

Avendo contemporaneamente due diverse b.c., una periodica in t e l'altra costante in t, ipotizziamo una soluzione di regime come composizione di una $f_1(z,t)$ a variabili separate (derivante dalla presenza di una b.c. periodica) e di una $f_2(z)$ costante (inerente all'altra b.c.):

$$T(z,t) = \phi(z)e^{-i\omega t} + \psi(z)$$ che inserita nell'eq. di Fourier dà

$$-i\omega\phi(z)e^{-i\omega t} = \chi\frac{d^2\phi}{dz^2}e^{-i\omega t} + \chi\frac{d^2\psi}{dz^2}$$ con le b.c.

$$-K\frac{d\phi}{dz}\Big|_{z=-L} e^{-i\omega t} - K\frac{d\psi}{dz}\Big|_{z=-L} = Q$$

$$-K\frac{d\phi}{dz}\Big|_{z=\phi} e^{-i\omega t} - K\frac{d\psi}{dz}\Big|_{z=\phi} = h\phi(\phi)e^{-i\omega t} - hT_0e^{-i\omega t} + h\psi(\phi)$$

In tutte le equazioni ci sono termini nella ϕ e nella ψ, cioè funzioni di tipo oscillante e costante, che sono $\Rightarrow$ linearmente indipendenti; perciò sia l'eq. del calore che le due per le b.c. sono scomponibili in coppie di eq. disaccoppiate che contengono solo la ϕ o la ψ:

$$(1)\begin{cases} -i\omega\phi(z)e^{-i\omega t} = \chi\phi''(z)e^{-i\omega t} \\ \phi'(-L) = \phi \\ -K\phi'(\phi)e^{-i\omega t} = h\phi(\phi)e^{-i\omega t} - hT_0e^{-i\omega t} \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} \psi''(z) = \phi \\ -K\psi'(-L) = Q \\ -K\psi'(\phi) = h\psi(\phi) \end{cases}$$

(1) La soluzione di $\phi''(z) = -\frac{i\omega}{\chi}\phi(z)$ è, con $\lambda^2 = -i\omega/\chi$, della forma già trovata nei casi precedenti:

$$\phi(z) = A\exp[(1-i)z/\delta] + B\exp[-(1-i)z/\delta] \quad \text{con } \delta \doteq \sqrt{2\chi/\omega}$$

e le b.c. richiedono

$$\left.\begin{aligned} &\phi'(-L)=0 \rightsquigarrow (1-i)\exp[-(1-i)L/\delta]\,A - (1-i)\exp[(1-i)L/\delta]\,B = 0 \\ &-K\phi'(0) = h\phi(0) - hT_0 \rightsquigarrow -\frac{K(1-i)}{\delta}A + \frac{K(1-i)}{\delta}B = h(A+B) - hT_0 \end{aligned}\right\}$$

sistema che, definendo il numero complesso $\alpha \doteq (1-i)L/\delta$, si riscrive

$$\left\{\begin{aligned} &Ae^{-\alpha} - Be^{\alpha} = 0 \rightsquigarrow B = Ae^{-2\alpha} \\ &[h+K(1-i)/\delta]A + [h-(1-i)/\delta]B = hT_0 \end{aligned}\right. \Rightarrow$$

$$A = hT_0 \Big/ \left\{[h+K(1-i)/\delta] + [h-K(1-i)/\delta]e^{-2\alpha}\right\}$$

esiste quindi una soluzione oscillante più o meno complicata, sempre con uno sfasamento rispetto alla forzante atmosferica.

(2) $\psi''(z)=0 \rightsquigarrow \psi'(z)=C \rightsquigarrow \psi(z)=Cz+D$

con le b.c.

$$\left\{\begin{aligned} &-K\psi'(-L)=Q \\ &-K\psi'(0)=h\psi(0) \end{aligned}\right. \longrightarrow \left\{\begin{aligned} &-KC=Q \quad \text{in } z=-L \\ &-KC=hD \quad \text{in } z=0 \end{aligned}\right.$$

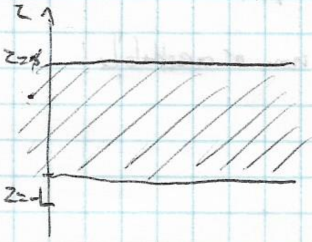
$$\Rightarrow \boxed{C=-Q/K}, \quad D=-KC/h \Rightarrow \boxed{D=Q/h}$$

$$\Rightarrow \psi(z) = Q\left(\frac{1}{h} - \frac{z}{K}\right)$$

che è un termine costante con un gradiente verticale negativo di temperatura, dato dal riscaldamento dello strato di sottosuolo da sotto.

Sottosuolo di profondità finita - soluzione transitoria con b.c. di Dirichlet omogenee

Consideriamo qui soluzione dipendente da una qualche condizione iniziale il cui contributo si smorza nel tempo lasciando luogo, dopo la fase transitoria, alla soluzione di regime dettata dalle forzanti (espresse dalle condizioni al contorno).



Considerando uno spessore del sottosuolo finito ($z \in [-L, \phi]$), trattiamo un caso come sempre x e y-invariante e b.c. di Dirichlet omogenee, ovvero nulle, cioè $T(z,t)$ rappresentata come combinazione di una soluzione di regime T_R e di una soluzione transitoria ha b.c. nulle per la parte transitoria (se le b.c. sono un valore costante $\neq \phi$, è possibile ricondursi a questo caso traslando di tale valore la T_R e con essa della T complessiva):

$$T(z,t) = \underbrace{T_R(z,t)}_{\text{sol. di regime}} + \underbrace{u(z,t)}_{\text{sol. transitoria}}$$

+ b.c. per u: $u(\phi,t) = u(-L,t) = \phi$

+ i.c. per u: $u(z,\phi) = u_0(z)$

Con la separazione delle variabili chiamiamo $u(z,t) = T(t)Z(z)$ la soluzione della parte transitoria, $\Rightarrow$ inserita nell'eq. di Fourier

$$\dot{T}(t)Z(z) = \chi T(t) Z''(z)$$

con b.c. $\quad T(t)Z(-L) = T(t)Z(\phi) = \phi$

Dividendo l'eq. di Fourier per $u = TZ$ si ha

$$\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = \chi \frac{Z''(z)}{Z(z)}$$

soddisfatta se entrambi i membri sono uguali a una stessa costante χK.

⊙ $Z(z)$ deve soddisfare l'equazione (agli autovalori)

$$Z''(z) = KZ(z) \qquad \text{con } K \text{ autovalore incognito}$$

con $Z(-L) = Z(\phi) = \phi$

⊙⊙ T soddisfa l'eq. $\dot{T}(t) = K\chi T(t)$ (problema di Cauchy)

con K determinato dalla precedente equazione e condizione iniziale che verrà trattata dopo.

Per la sol. ⊙ , $Z''(z) = KZ(z)$ si deve valutare la possibilità $K > \phi$, $K = \phi$, $K < \phi$.

* $K>\phi$ implica $Z(z) = A\exp(\sqrt{K}z) + B\exp(-\sqrt{K}z)$

e le b.c. danno $Z(-L)=\phi \longrightarrow \begin{cases} A\exp(-\sqrt{K}L) + B\exp(\sqrt{K}L) = \phi \\ A+B=\phi \end{cases}$, $Z(\phi)=\phi \longrightarrow$

che per soluzioni non banali richiede determinante dei coefficienti di A, B $=\phi$:

$$\exp(-\sqrt{K}L) - \exp(\sqrt{K}L) = \phi$$ che e' impossibile $\Rightarrow K>\phi$ non e' accettabile.

* $K=\phi$ implica $Z''(z)=\phi \rightsquigarrow Z'(z)=A \rightsquigarrow Z(z)=Az+B$

e le b.c. $\begin{cases} -AL+B=\phi \\ B=\phi \end{cases}$ implicano la sola soluzione banale $A=B=\phi \Rightarrow K=\phi$ non accettabile.

* $K<\phi \Rightarrow K=-\lambda^2 \Rightarrow Z''(z) = -\lambda^2 Z(z)$ ha soluzione generale

$$Z(z) = A\sin(\lambda z) + B\cos(\lambda z)$$

e b.c. $\begin{cases} -A\sin(\lambda L) + B\cos(\lambda L) = \phi \\ A\underbrace{\sin(\phi)}_{\phi} + B\underbrace{\cos(\phi)}_{1} = \phi \Rightarrow \boxed{B=\phi} \end{cases}$

e $A\sin(\lambda L)=\phi$ che e' soddisfatta per valori discreti di $\lambda \Rightarrow \lambda_n = n\pi/L$ con $n=1,2,3,\dots$

da cui $K_n = -\lambda_n^2 = -(n\pi/L)^2$ e soluzione che e' composizione di soluzioni $Z_n(z)$ /

$$Z_n(z) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right)$$

Riprendendo ora il problema di Cauchy ⊙⊙ con le K_n determinate $\dot{T}(t) = K_n\chi T(t)$

si hanno soluzioni

$$T_n(t) = C_n\exp(K_n\chi t) = C_n\exp\left[-\chi(n\pi/L)^2 t\right]$$

e rinominiamo A_n il prodotto tra costanti A_nC_n per essenzialita', così da avere

$$u_n(z,t) = Z_n(z)T_n(t) = A_n\exp\left[-\chi(n\pi/L)^2 t\right]\sin(n\pi/L\, z) \Rightarrow u(z,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(z,t)$$

Resta il punto della condizione iniziale, che e' poi quello che permette di determinare gli A_n. Il dato iniziale $u(z,\phi) = u_0(z)$ si può espandere in serie di seni nell'intervallo $[-L,\phi]$ (dove e' immediato convincersi che sia una serie di seni, in quanto funzioni annullabili sugli estremi del loro periodo):

$$u_0(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{0n}\sin(n\pi/L\, z)$$ ($n=\phi$ dai una costante, in contraddizione con le b.c. omogenee per cui $u=\phi$ agli estremi)

Si imponga ora che la soluzione $u(z,t)$ trovata uguagli il dato iniziale $u_0(z)$ per $t=0$:

$$u(z,0)=\sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) = u_0(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{0n} \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right)$$

$\Rightarrow$ $A_n = u_{0n}$ $\forall n = 1, 2, \dots$ cioè

$$u(z,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{0n} \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) \exp\left[-\chi\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right]$$

Questa soluzione tende a smorzarsi e a sparire del tutto nel tempo, data la presenza, in ogni termine della serie, di un'esponenziale decrescente con suo tempo di decadimento $\tau_n = \frac{1}{\chi}\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2$; il termine più lento a smorzarsi, con massimo τ_n, è $n=1$ con $\tau_1 = \frac{1}{\chi}\left(\frac{L}{\pi}\right)^2$.

Dopo tempi dell'ordine di alcuni τ_1 resterà solo la parte di regime $T_R(z,t)$; nel caso di b.c. omogenee (nulle), si tratta $\Rightarrow$ di T nulla.

Sottosuolo di profondità finita - soluzione transitoria con b.c. di Dirichlet inomogenee

Per trattare il problema transitorio con condizioni al contorno non omogenee si considera che il problema complessivo, cioè l'eq. di Fourier, è lineare rispetto a condizioni al contorno e condizioni iniziali; questo si traduce nella possibilità di rappresentare la soluzione completa come composizione di una soluzione di regime con le b.c. inomogenee più una soluzione transitoria che soddisfi condizioni al contorno omogenee e le condizioni iniziali assegnate (che è il caso visto appena prima).

Il problema della lastra finita è quindi così sintetizzato:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T(z,t)}{\partial t} = \chi \dfrac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2} \\ \left.\begin{array}{l} T(-L,t) = T_2 \\ T(\phi,t) = T_1 \end{array}\right] \to \text{b.c.} \\ T(z,\phi) = T_0(z) \quad] \to \text{i.c.} \end{cases}$$

Trasliamo l'incognita così da avere un nuovo problema per $T' = T - T_1$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T'}{\partial t} = \chi \dfrac{\partial^2 T'}{\partial z^2} \\ T'(-L,t) = T_2 - T_1 \doteq T_3 \\ T'(\phi,t) = \phi \\ T'(z,\phi) = T_0(z) - T_1 \doteq T_A(z) \end{cases}$$

e ora chiamiamo $T' \to T$ omettendo l'apice per praticità;

scomponiamo la soluzione come $T(z,t) = \underbrace{T_T(z,t)}_{\text{parte transitoria}} + \underbrace{T_R(z)}_{\text{parte di regime (stazionaria perché le b.c sono stazionarie)}}$

La soluzione di regime soddisfa perciò l'eq. del calore stazionaria con le b.c. date:

$$\frac{\partial^2 T_R}{\partial z^2} = \phi \quad ; \quad T_R(-L) = T_3 \; ; \; T_R(\phi) = \phi$$

$$T_R(z) = Az + B \qquad \begin{cases} -AL + B = T_3 \\ B = \phi \end{cases} \to A = -T_3/L \implies T_R(z) = -T_3 z/L = (T_1 - T_2)\, z/L$$

Per linearità, se T_R soddisfa le b.c. assegnate, la T_T ha b.c. nulle, omogenee, che imponiamo insieme alle cond. iniziali sottraendovi T_R:

$$\frac{\partial T_T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T_T}{\partial z^2} \quad ; \quad T_T(-L,t) = \phi \, ; \quad T_T(\phi,t) = \phi \quad \text{b.c.}$$

$$T_T(z,\phi) = T_{0T}(z,\phi) = T_A(z) - T_R(z) \quad \text{i.c.}$$

Essendo un problema con b.c. omogenee, la soluzione è quella già trovata nel caso precedente

$$T_T(z,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} T_{0T_n} \sin\left(\frac{\pi n}{L} z\right) \exp\left[-\chi\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right]$$

coi coefficienti T_{0T_n} dati dall'espansione in serie di seni della condizione iniziale

$$T_{0T}(z) = T_A(z) - T_R(z) = T_T(z,\phi) = \sum_{n=1}^{+\infty} T_{0T_n} \sin\left(\frac{n\pi}{L} z\right)$$

Possiamo tornare al nome originario T' per la somma $T_T + T_R$ =>

$$T'(z,t) = (T_1 - T_2)\, z/L + \sum_{n=1}^{+\infty} T_{0T_n} \sin\left(\frac{n\pi}{L} z\right) \exp\left[-\chi\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right]$$

e la temperatura originaria non traslata è $T(z,t) = T_1 + T'(z,t)$;
a tempi lunghi essa si riduce alla sola parte di regime:

$$T(z,t) \rightarrow T_R(z) = T_1 + (T_1 - T_2)\, z/L$$