Equazione del calore: metodo della funzione di Green (per mezzo infinito)

Se per casi relativamente semplici (1D, per esempio) la soluzione all'eq. di Fourier con condizioni iniziali e al contorno può essere trovata tramite metodi come separazione delle variabili e combinazioni lineari di termini, intendiamo qui delineare i fondamentali di un metodo generale, ovvero l'uso del <u>propagatore</u> o <u>funzione di Green</u>. Lo applichiamo a un mezzo indefinitamente esteso (cioè il dominio è $\mathbb{R}^3$), il che comporta l'uso della trasformata di Fourier. Nel caso di dominio limitato, il tipo di condizione al contorno (Dirichlet/Neumann) determina l'uso di varianti del metodo (dove il kernel della trasformazione non è più un'esponenziale immaginario ma un seno/coseno).

Il problema, che è formalmente simile ad altri problemi fisici (ovvero governati da un'equazione con la stessa struttura, cfr. eq. di Schrödinger), è del tipo

$$\frac{\partial f(\bar{x},t)}{\partial t} = \chi \nabla^2 f(\bar{x},t) \qquad \text{dove qui } f(\bar{x},t) = T(\bar{x},t)$$

+ i.c. $f(\bar{x},\phi) = f_0(\bar{x})$

+ b.c. $f(\bar{x}\to\infty, t)$ limitata

La trasformata di Fourier (TF) è definita $\hat{f}(\bar{p},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\bar{p}\cdot\bar{x}} f(\bar{x},t)\, d^3x$

e la sua antitrasformata (ATF) è $\quad f(\bar{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\mathbb{R}^3} e^{i\bar{p}\cdot\bar{x}}\hat{f}(\bar{p},t)\, d^3p$

La TF permette di passare a una più semplice eq. differenziale ordinaria. Moltiplicando l'eq. di Fourier per $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{-i\bar{p}\cdot\bar{x}}$ e integrando su $\mathbb{R}^3$ abbiamo

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\bar{p}\cdot\bar{x}}\frac{\partial f(\bar{x},t)}{\partial t}d^3x = \frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(\bar{p},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\bar{p}\cdot\bar{x}}\chi\nabla^2 f(\bar{x},t)\,d^3x = \text{per le proprietà della TF}^{*}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\mathbb{R}^3}(-\chi|\bar{p}|^2)e^{-i\bar{p}\cdot\bar{x}}f(\bar{x},t)\,d^3x = -\chi|\bar{p}|^2\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\mathbb{R}^3}e^{-i\bar{p}\cdot\bar{x}}f(\bar{x},t)\,d^3x = -\chi|\bar{p}|^2\hat{f}(\bar{p},t)$$

$*$: è immediato dimostrare in 1D che $TF\left\{\frac{df(x,t)}{dx}\right\} = -ip\, TF\{f(x,t)\}$ integrando per parti $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx}\frac{df}{dx}dx$, in quanto è $\left[e^{-ipx}f(x,t)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \phi$ perché la funzione è assolutamente integrabile su $\mathbb{R}$ (integrale del modulo finito) e per ricorsione $TF\left\{\frac{d^nf}{dx^n}\right\} = (-ip)^n\, TF\{f(x,t)\}$; si estende similmente a 3D

$\Rightarrow$ il problema diventa

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{f}(\bar{p},t)}{\partial t} = -\chi p^2 \hat{f}(\bar{p},t) \\ \hat{f}(\bar{p},0) = \hat{f}_0(\bar{p}) \quad \text{TF della cond. iniziale} \end{cases}$$

cioè un semplice problema di Cauchy alle condizioni iniziali, un'eq. con soluzione semplice

$$\hat{f}(\bar{p},t) = \hat{f}_0(\bar{p}) e^{-\chi p^2 t}$$ che ha antitrasformata

$$f(\bar{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\bar{p}\cdot\bar{x}} e^{-\chi p^2 t} \hat{f}_0(\bar{p}) d^3p = \left(\text{scrivendo la TF del dato iniziale } \hat{f}_0(\bar{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\bar{p}\cdot\bar{x}'} f_0(\bar{x}') d^3x' \right)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^3} \left[\int_{\mathbb{R}^3} e^{i\bar{p}\cdot(\bar{x}-\bar{x}')} e^{-\chi p^2 t} d^3p \right]}_{G(\bar{x}-\bar{x}',t)} f_0(\bar{x}') d^3x'$$

$$\Rightarrow f(\bar{x},t) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\bar{x}-\bar{x}',t) f_0(\bar{x}') d^3x \quad \text{convoluzione tra } G \text{ e } f_0$$

dove si è definito PROPAGATORE o FUNZIONE DI GREEN (o ancora, nucleo o kernel di Green o, in questo caso di calore)

$$G(\bar{z},t) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{(i\bar{p}\cdot\bar{z} - \chi p^2 t)} d^3p$$

Rielaboriamo l'integrale definitorio del propagatore:

$$G(\bar{x}-\bar{x}',t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3p \, e^{i\bar{p}\cdot\bar{z}} e^{-\chi p^2 t} = \frac{1}{(2\pi)^3} \prod_{k=1}^{3} \int_{\mathbb{R}} e^{ip_k z_k} e^{-\chi p_k^2 t} dp_k =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \prod_{k=1}^{3} \int_{\mathbb{R}} e^{-\chi p_k^2 t} e^{ip_k z_k - z_k^2/4\chi t + z_k^2/4\chi t} dp_k =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \prod_k e^{-z_k^2/4\chi t} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left[p_k\sqrt{\chi t} - iz_k/2\sqrt{\chi t}\right]^2} dp_k = *$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \prod_k e^{-z_k^2/4\chi t} \sqrt{\pi/\chi t} = \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\frac{\pi}{\chi t}\right)^{3/2} e^{-|\bar{z}|^2/4\chi t}$$

$*$ = integrale gaussiano: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$; $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\pi/\alpha}$; $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{\alpha}x-\beta)^2} dx = \sqrt{\pi/\alpha}$

$$\Rightarrow \boxed{G(\bar{x}-\bar{x}',t) = \frac{1}{8(\chi t)^{3/2}} e^{-|\bar{x}-\bar{x}'|^2/4\chi t}}$$

Note:

(*) l'integrale gaussiano ha risultato $\sqrt{\pi/\chi t}$; per esistenza dell'integrale si richiede dunque che $\sqrt{\chi t}$ sia reale, $\Rightarrow$ che $\underline{\underline{t>\phi}}$; per $t<\phi$ la soluzione non ha senso, il problema è malposto. Il fatto che la soluzione sia possibile per tempi successivi al dato iniziale è segnale del fatto che il problema del calore, nella forma dell'eq. del calore, è IRREVERSIBILE.

Vale la pena di notare che non è così per tutte le equazioni con la stessa struttura, e ne è esempio l'eq. di Schrödinger $i\hbar \frac{\partial \psi(\bar{x},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\bar{x},t)$

per la quale la procedura seguita per ricavare il propagatore non impone $t\geq\phi$: la soluzione $\exists$ $\forall t \in (-\infty,+\infty)$.

(*) Per dato iniziale $f_0(\bar{x}) = \delta(\bar{x})$

$$f(\bar{x},t) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\bar{x}-\bar{x}',t)\,\delta(\bar{x}')\,d^3x' = G(\bar{x},t)$$

cioè il propagatore è soluzione dell'equazione con condizione iniziale deltiforme; esso davvero rappresenta la "soluzione fondamentale" con cui si costruiscono tutte le altre.

(*) Bisognerebbe dimostrare che la soluzione

$$f(\bar{x},t) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\bar{x}-\bar{x}',t)\, f_0(\bar{x}')\, d^3x'$$

ottenuta con il propagatore del calore soddisfa il dato iniziale $f_0(\bar{x})$ per $f(\bar{x},t\to\phi)$; non è del tutto banale, ma si dimostra che

$$\lim_{t\to\phi} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp(-x^2/4t) = \delta(x)$$

che alla fine permette di arrivarci $\left(f(\bar{x},t\to\phi) = \int \delta(\bar{x}-\bar{x}')\, f_0(\bar{x}')\, d^3x' = f_0(\bar{x}) \right)$.

Legge di similarità per l'equazione del calore

Riprendiamo, e vediamo come rielaborare in forma adimensionata, l'eq. del calore

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\bar{v}\cdot \text{grad})T = \chi \nabla^2 T + \frac{\nu}{2c_p}(\partial_j v_i + \partial_i v_j)^2$$

in cui innanzitutto chiamiamo $S_{ij} \doteq (\partial_j v_i + \partial_i v_j)$ con cui

$$\frac{DT}{Dt} = \chi \nabla^2 T + \frac{\nu}{2c_p} S_{ij} S_{ij}$$

Per l'adimensionalizzazione usiamo delle grandezze caratteristiche L, U, $T_1 - T_0$ (differenza caratteristica di temperatura: sono le ΔT il motore dello scambio termico) del problema $\Rightarrow$

$\bar{x}' = \bar{x}/L \rightsquigarrow \bar{x} = \bar{x}' L \rightsquigarrow dx = L dx'$

$\bar{v}' = \bar{v}/U \rightsquigarrow \bar{v} = \bar{v}' U \rightsquigarrow dv = U dv'$

$t' = t U/L \rightsquigarrow t = t' L/U \rightsquigarrow dt = \frac{L}{U} dt'$

$\vartheta = (T - T_0)/(T_1 - T_0) \rightsquigarrow T - T_0 = \vartheta (T_1 - T_0) \rightsquigarrow dT = (T_1 - T_0) d\vartheta$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} + (\bar{v}\cdot\text{grad})T = \chi \nabla^2 T + \frac{\nu}{2c_p} S_{ij} S_{ij}$$

$$\frac{U}{L}\frac{\partial \vartheta}{\partial t'}(T_1 - T_0) + \frac{U}{L}(\bar{v}'\cdot\text{grad}')\vartheta(T_1 - T_0) = \chi \frac{1}{L^2}\nabla'^2 \vartheta (T_1 - T_0) + \frac{\nu}{2c_p}\frac{U^2}{L^2} S'_{ij} S'_{ij}$$

e dividendo tutto per $\frac{U}{L}(T_1 - T_0)$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t'} + (\bar{v}'\cdot\text{grad}')\vartheta = \chi \frac{1}{UL}\nabla'^2\vartheta + \boxed{\frac{\nu}{2c_p}\frac{U}{L}\frac{1}{(T_1 - T_0)}} S'_{ij} S'_{ij}$$

$Pe = RePr$ = # di Péclet $\frac{\text{tasso trasp. convettivo}}{\text{tasso trasp. diffusivo}}$

$$\chi/UL = \frac{\chi}{\nu}\frac{\nu}{UL} = \frac{\chi}{\nu}\frac{1}{Re} = \frac{1}{Pr}\frac{1}{Re}$$ avendo definito $\boxed{Pr \doteq \frac{\nu}{\chi}}$ numero di Prandtl

$$\frac{\nu}{2c_p}\frac{U}{L}\frac{1}{T_1 - T_0} \underset{\uparrow}{=} \frac{\chi}{UL}\left(\frac{1}{\chi}\frac{\nu}{2c_p}\frac{U^2}{(T_1 - T_0)}\right) \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{RePr}\frac{\eta U^2}{2K(T_1 - T_0)} = \frac{1}{RePr}\frac{1}{2}Br$$

raccogliendo $1/RePr$ $\qquad \chi = K/\rho c_p$

chiamando $\mathbf{Br} \doteq \eta U^2 / K(T_1 - T_0)$ <u>numero di Brinkman</u>

$$\Rightarrow \boxed{\frac{D\vartheta}{Dt'} = \frac{1}{RePr}\left(\nabla'^2 \vartheta + \frac{1}{2}Br\, S'_{ij} S'_{ij}\right)}$$ eq. del calore adimensionata

(3 # descrivono il problema: **Re**, **Pr**, **Br**)

Note:

- $Pr = \nu/\chi$ è una proprietà del mezzo, non dipende dal flusso (stato dinamico), infatti non vi compaiono velocità o densità. Per i gas i valori tipici sono dell'ordine dell'unità, per fluidi liquidi l'intervallo è molto esteso (fluidi comuni come acqua o alcool a T ambiente hanno $Pr \sim 1 \div 10$, oli motore $\sim 10^2 \div 10^4$, il mantello della Terra ha Pr enormi, $10^{21} \div 10^{25}$).

  L'evidente significato di $Pr = \nu/\chi$ è un rapporto tra diffusività cinematica (viscosa) e termica.

- Per il significato di **Br** lo si rielabori dividendo numeratore e denominatore per L^2:

$$\frac{1}{2}Br = \frac{\eta U^2}{2K(T_1-T_0)} = \frac{1}{2}\eta\left(U/L\right)^2 \Big/ \frac{1}{L}K\frac{T_1-T_0}{L}$$

Ricordando che la dissipazione di energia in un fluido incomprimibile è

$$\frac{dE_m}{dt} = -\frac{1}{2}\eta\int(\partial_j v_i + \partial_i v_j)^2 d^3x \quad \rightsquigarrow \text{dimensionalmente} \quad \frac{1}{2}\eta\left(\frac{U}{L}\right)^2 Vol$$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\eta(U/L)^2$ è un'<u>energia</u> per unità di tempo e volume ricevuta dall'el. di continuo <u>per processi di dissipazione viscosa</u>;

flusso di calore $q = K\,\mathrm{grad}\,T$ $\rightsquigarrow$ dimensionalmente $\sim K\Delta T/L$;

$\int \bar{q}\cdot d\bar{\sigma} \sim qL^2$ è una potenza, $\Rightarrow q/L \sim K\Delta T/L^2$ <u>energia</u> per unità di tempo e volume ricevuta <u>per conduzione del calore</u>.

$\Rightarrow$ **Br** è un rapporto tra energie (per unità di tempo e volume) ricevute dal mezzo tramite dissipazione viscosa di energia meccanica e conduzione del calore.

- Riscalando le lunghezze con una L caratteristica della scala di variazione <u>delle velocità</u>, e non delle temperature, possiamo dire che le grandezze cinematiche si riducono a ordine ~ 1, mentre le derivate della temperatura, come $\nabla'^2\vartheta$, non sono necessariamente dello stesso ordine! Dipende tutto dalle lunghezze di scala, cinematiche e termiche, e quanto sono vicine/lontane.

  $\Rightarrow$ nella somma $\nabla'^2\vartheta + \frac{1}{2}Br\, S_{ij}S_{ij}$, anche per $RePr$ molto grande non è necessariamente trascurabile anche il primo addendo.

- A cascata, se $Br \ll 1$, cioè dissipazione di energia meccanica trascurabile rispetto al trasporto di energia tramite conduzione, e invece $\nabla'^2\vartheta \sim$ ordine 1 $\Rightarrow$ si ha <u>soluzione senza termine dissipativo</u>, ovvero

$$\frac{D\vartheta}{Dt'} = \frac{1}{PrRe}\nabla'^2\vartheta$$

cioè la forma adimensionata di quanto già noto: $\frac{DT}{Dt} = \chi\nabla^2 T$.

⊙ La soluzione dell'eq. del calore dà una ϑ (o T) che dipende esplicitamente dal prodotto $RePr$, ma anche implicitamente dallo stesso Re ovvero dalla velocità che è il risultato della soluzione dell'eq. di Navier-Stokes, $\Rightarrow \vartheta = \vartheta(\bar{x}' = \bar{x}/L, t', Re, Pr)$ in generale e $T = (T_1 - T_0)\vartheta(\bar{x}', t', Re, Pr)$.

⊙ Consideriamo i casi limite dell'eq. del calore (adimensionata) per grandi e piccoli numeri di Reynolds.

Soluzione per $Re \to \infty$

L'eq. del calore $\frac{D\vartheta}{Dt'} = \frac{1}{RePr}(\nabla'^2\vartheta + \frac{1}{2}Br s_{ij}s_{ij})$,

dati Pr (che è una caratteristica del materiale) e Br, per $Re \to \infty$ si annulla il secondo membro,

$\Rightarrow \frac{D\vartheta}{Dt'} = \phi$ che è l'eq. del calore per un fluido perfetto: equivale infatti a $\frac{Ds}{Dt} = \phi$

(in assenza di variazioni di T e $\Rightarrow$ di trasporto di calore non c'è variazione di entropia)

Si noti che Re molto grande equivale a η piccolo, poiché si è fissato il numero di Prandtl, $Pr = \frac{\nu}{\chi} = \frac{\eta}{Kc_p}$ per η piccolo deve anche avere K piccolo, cioè conducibilità trascurabile, proprio quanto richiesto per avere un fluido ideale (conduzione implica dissipazione e non-idealità). Queste osservazioni sull'eq. del calore a grandi Re completano l'affermazione fatta per la dinamica di un fluido, per la quale il fluido perfetto è il limite del fluido reale per $Re \to \infty$. Infatti in questa condizione

l'eq. di Navier-Stokes tende all'eq. di Eulero

l'eq. del calore tende a $\frac{D\vartheta}{Dt'} = \phi$ cioè a $\frac{Ds}{Dt} = \phi$ eq. adiabatica;

perciò l'evoluzione termodinamica del fluido per $Re \to \infty$ diventa REVERSIBILE.

Osservazione importante: ciò vale anche quando si consideri un Re locale, definito usando una lunghezza caratteristica dell'ordine del diametro dei corpi immersi, a sufficiente distanza da questi e di conseguenza fuori dallo strato limite.

Soluzione per $Re \to 0$

Per questo limite, opposto al precedente, l'eq. del calore si riduce a

$$\nabla'^2 \vartheta + \frac{1}{2} Br\, S_{ij} S_{ij} = 0$$

ovvero $$\chi \nabla^2 T + \frac{\nu}{2c_p} S_{ij} S_{ij} = 0$$

Se possiamo di nuovo dire che la conduzione prevale sulla dissipazione di energia meccanica, cioè Br è molto piccolo, troviamo

$$\chi \nabla^2 T = 0, \quad \text{cioè } \nabla'^2 \vartheta = 0 \quad \text{ossia } \vartheta = \vartheta(\bar{x}' = \bar{x}/L, t') \text{ indipendente da } Re\, Pr.$$

Esempio: prendiamo un flusso stazionario di Poiseuille (= dettato da un gradiente di pressione) in un condotto a sezione cilindrica, con parete a temperatura costante $T(R) = T_0$ e $Re \to 0$.

La soluzione già trovata per $\bar{v}$ era

$$v_z(r) = \frac{\Delta p}{4\eta\ell}(R^2 - r^2) = 2\tilde{v}\left[1 - (r/R)^2\right], \text{ con } \tilde{v} \text{ vel. media } \left(\tilde{v} = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R v_z(r)\, 2\pi R\, dR = \frac{\Delta p R^2}{8\eta\ell}\right)$$

L'eq. $\chi \nabla^2 T + \frac{\nu}{2c_p} S_{ij} S_{ij} = 0$ si riduce a

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = -\frac{\nu}{2c_p\chi}\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)^2$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = -4\tilde{v}\frac{r}{R^2}; \quad \left(\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)^2 = 16\tilde{v}^2\frac{r^2}{R^4}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = -\frac{8\nu\tilde{v}^2}{c_p\chi R^4} r^3 \rightsquigarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{2\nu\tilde{v}^2}{c_p\chi R^4} r^3 + \frac{A}{r} \to T(r) = -\frac{\nu\tilde{v}^2}{2c_p\chi R^4} r^4 + A\log r + B$$

Poiché $T(0)$ deve essere finita, $A = 0$; $T(R) = T_0 = -\frac{\nu\tilde{v}^2}{2c_p\chi} + B \Rightarrow B = \frac{\nu\tilde{v}^2}{2c_p\chi} + T_0$

$$\Rightarrow T(r) - T_0 = \frac{\nu\tilde{v}^2}{2c_p\chi}\left[1 - (r/R)^4\right] = \frac{1}{2}\frac{\tilde{v}^2}{c_p} Pr\left[1 - (r/R)^4\right]$$

(si noti che qui $T - T_0$ è $\sim \frac{v^2}{2c_p} Pr \cdot f(\text{geometria})$; cfr. la discussione nelle pagine successive).

Scambio termico solido - fluido: coefficiente di scambio termico e numero di Nusselt

Consideriamo il riscaldamento di un corpo che è stato immerso in un fluido. Come già visto negli esempi di scambio di calore per il sottosuolo con condizione mista all'interfaccia, uno scambio tra solido e fluido (in quel caso l'atmosfera) è dato da un'espressione per la densità di flusso di calore q

$$q = \alpha(T_1 - T_0)$$

con $T_1 = T_s|_{sup}$ temperatura superficiale del solido, T_0 = temperatura fondamentale (o caratteristica) del fluido, e α = coefficiente di scambio termico (anche indicato come h).

Il flusso di calore sulla superficie del solido è

$$q = -K_s \frac{\partial T_s}{\partial x_n} = -K_F \frac{\partial T_F}{\partial x_n}$$ con x_n normale da S (solido) verso F (fluido)

e K_F, T_F coefficiente di conduzione e temperatura del solido,

K_s, T_s coefficiente di conduzione e temperatura del fluido. Perciò

$$-K_s \frac{\partial T_s}{\partial x_n} = \alpha(T_1 - T_0)$$ appunto la condizione mista già trattata. Esplicitando α si ha

$$\alpha = -\frac{K\partial T/\partial x_n}{T_1 - T_0} \rightsquigarrow \text{in variabili adimensionate} = -\frac{K}{L}\frac{\partial\vartheta/\partial x_n}{\vartheta}$$

con $\vartheta = \vartheta(\bar{x}' = \bar{x}/L, Re, Pr)$

dove non includiamo una dipendenza temporale perché consideriamo lo stato stazionario raggiunto, in cui c'è comunque una ΔT tra la superficie del solido e il fluido per l'attrito che fa dissipare calore nelle vicinanze del corpo (si noti a questo proposito una cosa importante: misurare la temperatura di un fluido inserendovi una sonda può dare un risultato non del tutto esatto per un fluido in moto perché la dissipazione, ovvero l'attrito nei pressi della sonda, innalza la temperatura superficiale del solido T_s rispetto alla T_F; in altre parole, la misura è perturbativa).

Dunque α dipende da:

- Re;
- Pr;
- geometria del corpo/superficie (si intuisce già dall'esistenza di una lunghezza L che è usata per adimensionare $\bar{x}' = \bar{x}/L$).

Il coefficiente di scambio termico α non è adimensionato, ma gli si può associare un numero adimensionato

$Nu = \alpha L / K_F$ numero di Nusselt (dove si usa il coefficiente di conduzione termica del fluido K_F)

che come α è a sua volta una funzione $Nu(Re, Pr,$ geometria della superficie$)$; per piccoli Re $(Re \to \phi)$, laddove l'eq. del calore si riduce a

$\nabla^2 T = \phi$ $\Rightarrow$ T non dipende più da Re, Pr, $\Rightarrow$ $Nu = Nu(\text{geometria})$, si può determinare dal fluido a riposo, non entrandovi più le caratteristiche dinamiche (e del resto $Re \to \phi$ equivale a $\bar{U}$ piccola).

Analizziamo ulteriormente il problema del corpo riscaldato da un fluido in moto perché ciò ci porta a trattare (e poi adimensionare) diversamente l'eq. del calore.

Anche osservando il caso stazionario, ci sarà, come già spiegato, una differenza $T_1 - T_0$ tra solido e fluido per l'attrito nello strato limite. Nell'eq. del calore

$$\frac{DT}{Dt} = \chi \nabla^2 T + \frac{\nu}{2c_p} S_{ij} S_{ij}$$

il termine dipendente dai gradienti di velocità e dalla viscosità è chiaramente non più trascurabile; inoltre, la $T_1 - T_0$ è effettivamente incognita, e ciò ci porta a cercare un modo diverso per adimensionare l'equazione.

Il ragionamento è il seguente: data l'energia cinetica $E_k \sim \frac{1}{2} U^2$, per una variazione di velocità da valore nullo a U (caratteristica in quanto rappresentativa del gradiente tra superficie e bulk del fluido) si ha una $\Delta E_k \sim \frac{1}{2} U^2 = -\Delta E$ variazione di energia che a sua volta è $\Delta E = c_p \Delta T = c_p (T_1 - T_0)$ $\Rightarrow$ usiamo

$$T - T_0 = (T_1 - T_0)\vartheta = \frac{1}{2}\frac{U^2}{c_p}\vartheta$$ come espressione per adimensionare T;

$$\Rightarrow \quad \frac{DT}{Dt} = \underbrace{\chi \nabla^2 T}_{} + \underbrace{\frac{\nu}{2c_p} S_{ij} S_{ij}}_{}$$

$$\frac{U}{L}\frac{1}{2}\frac{U^2}{c_p}\frac{D\vartheta}{Dt'} = \frac{\chi}{L^2}\frac{U^2}{2c_p}\nabla'^2\vartheta + \frac{\nu}{2c_p}\frac{U^2}{L^2} S'_{ij} S'_{ij}$$

$$\Rightarrow \frac{D\vartheta}{Dt'} = \underbrace{\frac{\chi}{LU}}_{1/Re\,Pr} \nabla'^2\vartheta + \underbrace{\frac{\nu}{LU}}_{1/Re} S'_{ij}S'_{ij} \quad \Rightarrow \boxed{\frac{D\vartheta}{Dt'} = \frac{1}{Re}\left(\frac{1}{Pr}\nabla'^2\vartheta + S'_{ij}S'_{ij}\right)}$$

e consideriamo i casi per diverse gamme di valori di Re.

① Re intermedio ; equazione completa

$\frac{D\vartheta}{Dt'} = \frac{1}{Re}\left(\frac{1}{Pr}\nabla'^2\vartheta + S'_{ij}S'_{ij}\right)$ ha secondo membro che è $f(Re, Pr)$

$\Rightarrow$ tornando a grandezze reali $\left(\vartheta = \frac{\varrho c_p}{U^2}\Delta T\right)$ si ha $\underline{\underline{T_1 - T_0 \sim \frac{U^2}{\varrho c_p} f(Re, Pr)}}$

② $Re \ll 1$

Si può annullare il primo membro $\frac{D\vartheta}{Dt'} = 0 \Rightarrow \nabla'^2\vartheta = -Pr\, S'_{ij}S'_{ij}$ che è un'eq. di Poisson
$\rightarrow$ (del resto $\bar{v} \cdot \text{grad}\, T$ piccolo per $\bar{v}$ piccola $\Rightarrow$ Re piccolo)

Con gli S'_{ij} ~ ordine 1 i sono stati adimensionati, e determinati dall'eq. di Navier-Stokes adimensionata, perciò funzione del numero di Reynolds;

$\Rightarrow \nabla'^2\vartheta \sim Pr \cdot f(Re)$

e tornando a grandezze reali $\rightarrow \underline{T_1 - T_0 \approx \frac{U^2}{\varrho c_p} Pr \cdot f(Re)}$

(gradienti, laplaciani, derivate in generale sono primati cioè adimensionali e $\Rightarrow$ ~ ordine 1)

③ $Re \gg 1$

$\bar{v}, T$ variano solo in un sottile strato limite, non necessariamente lo stesso, diciamo su distanze δ e δ' rispettivamente ; la loro differenza dipende dalle proprietà viscose e termiche del fluido, cioè da $\underline{Pr}$.

L'energia dissipata per attrito e liberata nel fluido, per unità di volume è

$\eta\left(\frac{U}{\delta}\right)^2 \Rightarrow$ scritta invece per unità di superficie del solido $\eta U^2/\delta$;

essa è pari al flusso di calore

$$q = -K\frac{\partial T}{\partial x_n} \sim \chi c_p \rho \frac{T_1 - T_0}{\delta'} \Rightarrow \eta \frac{U^2}{\delta} = \chi c_p \rho (T_1 - T_0)/\delta'$$

$$\Rightarrow T_1 - T_0 = \frac{\nu}{\chi c_p}\frac{\delta' U^2}{\delta} = \frac{U^2}{c_p} Pr \underbrace{\left(\frac{\delta'}{\delta}\right)}_{\text{a sua volta } f(Pr)} \Rightarrow \underline{T_1 - T_0 = \frac{U^2}{c_p} f(Pr)}$$

; non compare più Re