Convezione libera

Nello studio di equilibrio e stabilità dell'atmosfera, ovvero di un fluido sottoposto a un campo gravitazionale verticale, si è determinato che la condizione di equilibrio stabile coinvolge la temperatura T: questa deve essere una funzione della sola quota z, e in particolare il suo gradiente dev'essere contenuto entro il limite

$$-\frac{dT}{dz} \leq \frac{g\beta T}{c_p} \qquad \text{(per atmosfera isoentropica secca)}$$

Se la distribuzione di T dipende dalle altre coordinate, o se la T diminuisce troppo rapidamente con l'altitudine, si instaura una CONVEZIONE LIBERA (o NATURALE), ovvero non vi è più equ. meccanico e si creano correnti nel fluido, che tendono a uniformare il campo di T tramite il rimescolamento del fluido stesso.

Le ipotesi alla base della descrizione del fenomeno sono:

* fluido meccanicamente incomprimibile; ovvero, una variazione di pressione comporta una variazione di densità trascurabile; ciò impone un limite all'altezza della colonna di fluido considerata;
* è invece (naturalmente) concessa l'espansione termica, ovvero la variazione di ρ per effetto della variazione di T;
* consideriamo variazioni comunque piccole di ρ e T rispetto a valori medi uniformi ρ_0, T_0:

$$T = T_0 + T' \quad ; \quad \rho = \rho_0 + \rho'$$

da cui
$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial T}\right)_p T' = -\rho_0 \left[-\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial T}\right)_p\right] T' = -\rho_0 \beta T' \qquad (\beta \text{ coeff. di espansione termica})$$

* la variazione di p si scrive similmente, $p = p_0 + p'$,

dove però p_0 non è un valore uniforme, bensì la p di equilibrio meccanico alla quota z quando si abbiano ρ_0, T_0; p_0 dunque obbedisce all'eq. di equilibrio idrostatico

$$p_0(z) = -\rho_0 g z + \text{costante} = \rho_0\, \bar{g} \cdot \bar{x} + \text{costante} \qquad (\bar{g} = -g\hat{e}_z)$$

Cosa impongono queste condizioni?

(A) Innanzitutto, considerando una scala di altezza tipica h si ottiene una caduta di p idrostatica

$\Delta p = \rho_0 g h$ e nota la relazione $\frac{1}{c^2} = \frac{\partial \rho(p,s)}{\partial p}$ (c vel. del suono)

si può dire che per azione meccanica

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s dp = \frac{1}{c^2} dp$$

ovvero sulla lunghezza h

$$\Delta \rho = \frac{1}{c^2} \Delta p = \frac{1}{c^2} \rho_0 g h$$

Ma per l'ipotesi iniziale di comprimibilità meccanica trascurabile, questa variazione $\Delta\rho$ di origine meccanica deve essere $< \rho_0, \rho'$, =>

$$\frac{\rho_0 g h}{c^2} \ll \rho' = \left|\rho_0 \beta T'\right|^{(*)}_{\text{sulla scala } h} = \rho_0 \beta \Delta T$$

con $\Delta T = T - T_0$ variazione caratteristica di temperatura sulla scala di lunghezza di riferimento h,

=> la condizione imposta è

$$\boxed{gh/c^2 \ll \beta \Delta T}$$

(3) Ora vediamo le conseguenze sull'eq. di Navier-Stokes

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \text{grad})\bar{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \nabla^2 \bar{v} + \bar{g}$$

in cui inseriamo $p = p_0 + p'$, $\rho = \rho_0 + \rho'$; consideriamo quindi il termine $\text{grad} p / \rho$:

$$\frac{\text{grad} p}{\rho} = \frac{\text{grad} p_0}{\rho_0 + \rho'} + \frac{\text{grad} p'}{\rho_0 + \rho'} \overset{(**)}{=} \frac{\text{grad} p_0}{\rho_0} - \frac{\text{grad} p_0}{\rho_0^2}\rho' + \frac{\text{grad} p'}{\rho_0} - \cancel{\frac{\text{grad} p'}{\rho_0^2}\rho'}$$

e trascuriamo l'ultimo termine, con approssimazione al I ordine

=> con $\text{grad} p_0 = -\rho_0 \text{ grad}(gz) = \rho_0 \bar{g}$ e $\rho' = -\rho_0 \beta T'$

$$\frac{\text{grad} p}{\rho} = \bar{g} + \frac{\text{grad} p'}{\rho_0} + \beta T' \bar{g}$$ <=> Navier-Stokes risulta infine

$$\boxed{\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \text{grad})\bar{v} = -\frac{1}{\rho_0} \text{grad} p' + \nu \nabla^2 \bar{v} - \beta T' \bar{g}}$$

(*) consideriamo il modulo, nel confronto di grandezza

(**) $f(\rho) = f(\rho_0) + \left.\frac{df(\rho)}{d\rho}\right|_{\rho=\rho_0} (\rho - \rho_0)$; con $f(\rho) = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} - \left.\frac{1}{\rho^2}\right|_{\rho=\rho_0} (\rho - \rho_0) = \frac{1}{\rho_0} - \frac{\rho'}{\rho_0^2}$

(C) L'eq. del calore non subisce particolari riarrangiamenti; si osserva semplicemente che in molti casi il termine di origine viscosa è trascurabile:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\bar{v}\cdot \mathrm{grad})T = \chi \nabla^2 T \left(+ \frac{\nu}{2c_p} S_{ij}S_{ij} \right)$$

In conclusione il fenomeno della convezione è descritto dalle eq. di Navier-Stokes e del calore così come le abbiamo scritte, insieme alla richiesta di incomprimibilità (e alle b.c.); il sistema di eq. ottenuto è detto APPROSSIMAZIONE DI BOUSSINESQ (Boussinesq flow):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v}\cdot \mathrm{grad})\bar{v} = -\dfrac{1}{\rho_0}\,\mathrm{grad}\, p' + \nu \nabla^2 \bar{v} - \beta T' \bar{g} \\ \dfrac{\partial T}{\partial t} + (\bar{v}\cdot \mathrm{grad})T = \chi \nabla^2 T \left(+ \dfrac{\nu}{2c_p} S_{ij}S_{ij} \right) \\ \mathrm{div}\, \bar{v} = 0 \\ + \text{ b.c.} \end{cases}$$

Si tratta di 5 eq. scalari per altrettante incognite ($\bar{v}$, p'/ρ_0, T), e vi corrispondono altrettanti parametri che racchiudono la fisica dello specifico sistema in esame: ν, χ, βg e le grandezze di scala h e ΔT. ~~Ancora~~ Ancora una volta, la procedura di adimensionalizzazione è utile per evidenziare queste e altre proprietà fisiche del fenomeno. A tal proposito, si noti innanzitutto che tra le grandezze caratteristiche non c'è una velocità u indipendente, perché il moto è originato dal riscaldamento non omogeneo e dalla conseguente convezione, non dall'azione di forze esterne applicate. La u caratteristica si ricava per confronto tra termine convettivo e di spinta termica di galleggiamento (buoyancy):

$$(\bar{v}\cdot \mathrm{grad})\bar{v} \sim u^2/h \quad \longleftrightarrow \quad \beta T' \bar{g} \sim \beta g \Delta T$$

$$\Rightarrow \quad \underline{u \sim (\beta g h \Delta T)^{1/2}}$$

mentre si riscrivono le altre grandezze adimensionate alla solita maniera:

$$x' \doteq x/h \;; \quad \pi \doteq p'/\rho_0 u^2 \;; \quad \vartheta \doteq T'/\Delta T \;; \quad t' \doteq t/(h/u)$$

e inserendo il tutto nell'eq. di Navier-Stokes si ha

$$\frac{u^2}{h}\frac{\partial \bar{v}'}{\partial t'} + \frac{u^2}{h}(\bar{v}'\cdot \mathrm{grad}')\bar{v}' = -\frac{1}{\rho_0}\rho_0 u^2 \frac{1}{h}\mathrm{grad}'\bar{\pi} + \frac{u}{h^2}\nu\nabla'^2\bar{v}' + \beta g\Delta T\vartheta\hat{e}_2$$

che moltiplicata ambo i membri per h/u^2 dà

$$\frac{\partial \bar{v}'}{\partial t'} + (\bar{v}'\cdot \mathrm{grad}')\bar{v}' = -\mathrm{grad}'\bar{\pi} + \frac{\nu}{hu}\nabla'^2\bar{v}' + \frac{\cancel{\beta g h\Delta T}}{\cancel{u^2}}\vartheta\hat{e}_2 \quad \to \doteq u^2$$

La quantità adimensionata che rimane nell'equazione è la sola ν/hu, ovvero

$$\frac{\nu}{uh} = \frac{\nu}{\sqrt{\beta g h^3\Delta T}} \quad \text{e si definisce} \quad \boxed{Gr \doteq \frac{\beta g\Delta T h^3}{\nu^2}} \quad \text{\# di Grashof,}$$

con cui si ottiene

$$\boxed{\frac{\partial \bar{v}'}{\partial t'} + (\bar{v}'\cdot \mathrm{grad}')\bar{v}' = -\mathrm{grad}'\bar{\pi} + \frac{1}{(Gr)^{1/2}}\nabla'^2\bar{v}' + \vartheta\hat{e}_2}$$

Operiamo similmente sull'eq. del calore (consideriamo per completezza anche il termine viscoso):

$$\frac{u\Delta T}{h}\frac{\partial\vartheta}{\partial t'} + \frac{u\Delta T}{h}(\bar{v}'\cdot \mathrm{grad}')\vartheta = \chi\frac{\Delta T}{h^2}\nabla'^2\vartheta + \frac{\nu}{2c_p}\frac{u^2}{h^2}S_{ij}'S_{ij}'$$

e moltiplicando per $h/u\Delta T$ a entrambi i membri si ha

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t'} + (\bar{v}'\cdot \mathrm{grad}')\vartheta = \frac{\chi\nabla'^2\vartheta}{uh} + \frac{\nu}{2c_p}\frac{u}{h\Delta T}S_{ij}'S_{ij}'$$

di cui si debbono rielaborare i gruppi adimensionati al secondo membro:

⊙ $\frac{\chi}{uh} = \frac{\chi}{\nu}\frac{\nu}{uh} = \frac{1}{Pr}\frac{\nu}{\sqrt{\beta g h^3\Delta T}} = \frac{1}{Pr}\frac{1}{(Gr)^{1/2}}$

⊙ $\frac{\nu}{2c_p}\frac{u}{h\Delta T} =$ (richiamando il # di Brinkman Br)

$$= \frac{\nu}{2c_p}\frac{K}{hu}\frac{u^2}{K\Delta T} = \frac{1}{2}\underbrace{\frac{K}{\rho c_p}}_{\chi}\frac{1}{hu}\underbrace{\frac{\eta u^2}{K\Delta T}}_{Br} = \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\chi}{hu}}_{1/Pr\,Gr^{1/2}}Br = \frac{1}{Pr\,Gr^{1/2}}\cdot\frac{1}{2}Br$$

(qui $Br = \eta\beta g h/K$)

$\Rightarrow$ in definitiva si ha

$$\boxed{\frac{\partial\vartheta}{\partial t'} + (\bar{v}'\cdot \mathrm{grad}')\vartheta = \frac{1}{Pr\,Gr^{1/2}}\left(\nabla'^2\vartheta + \frac{1}{2}Br\,S_{ij}'S_{ij}'\right)}$$

Vediamo dunque alcune utili considerazioni interpretative.

* Chiariamo esplicitamente il significato del numero di Grashof. Un elemento di fluido riscaldato si porta a densità ρ e subisce una spinta di galleggiamento (buoyancy force)

$$F_b = (m-m_0)g = (\rho-\rho_0)g\ell^3 = \rho' g \ell^3 = \rho_0 \beta \Delta T g \ell^3$$

dunque riscrivendo Gr

$$Gr = \beta g \Delta T \ell^3/\nu^2 = F_b/\rho_0\nu^2$$

e chiaramente la quantità a denominatore $\rho_0\nu^2$, comparendovi la viscosità, deve essere una forza viscosa (che sia una forza si vede facilmente tramite l'analisi dimensionale)

$$\Rightarrow Gr = \frac{\text{forza di galleggiamento (di origine termica)}}{\text{forze viscose}}$$

ovvero Gr dà la misura, il confronto tra la spinta che fa muovere gli elementi di fluido a causa del riscaldamento (convezione) e le forze viscose che si oppongono al moto.

* Abbiamo visto che la velocità caratteristica del fenomeno puramente convettivo è del tipo $u \sim (\beta g h \Delta T)^{1/2}$. Riscrivendo perciò il # di Grashof con u,

$$Gr = \frac{\beta g \Delta T h^3}{\nu^2} = \frac{u^2 h^2}{\nu^2} \text{ che è formalmente } = Re^2 \quad (Re = u\ell/\nu)$$

Il numero di Grashof assume perciò un ruolo analogo a quello di Re laddove il moto sia di origine puramente termica (di contro, Re dà conto del moto per forze applicate). Infatti se si osservano le equazioni di Navier-Stokes e del calore adimensionate, si trova $\sqrt{Gr}$ laddove nel caso puramente dinamico (per N.-S.) o conduttivo (per il calore) si trovava Re.

* Questa analogia $Gr \sim Re^2$ si spinge oltre: per Gr ~~molto~~ grande $(> 10^7 - 10^9)$ il moto assume caratteristiche turbolente; inoltre il limite $Gr \to \infty$ riporta alle equazioni per il fluido perfetto (N.-S. $\to$ Eulero, $D\theta/Dt' = \varphi \rightsquigarrow$ eq. adiabatica).

* Abbiamo considerato il caso della convezione naturale pura, in cui il moto è esclusivamente di origine termica; se abbiamo anche azioni meccaniche che portano il fluido in moto si può

parlare di CONVEZIONE FORZATA. In effetti è proprio il confronto tra Re e Gr (o meglio, Re^2 e Gr) a stabilire quale tipo di azione dominante:

$$\frac{Gr}{Re^2} \gg 1 \quad \text{convezione libera}$$

$$\frac{Gr}{Re^2} \sim 1 \quad \text{convezione mista}$$

$$\frac{Gr}{Re^2} \ll 1 \quad \text{convezione forzata}$$

Non a caso il rapporto Gr/Re^2 costituisce una delle possibili espressioni del numero di Richardson Ri, definito come rapporto tra forze di galleggiamento e di shear

$$Ri = \frac{g}{\rho} \frac{\partial\rho/\partial z}{(\partial u/\partial z)^2} = \frac{Gr}{Re^2}$$

⊛ Un esempio per mostrare che nell'eq. del calore il termine viscoso è trascurabile: stimiamo Br con i valori tipici, a temperatura ~ ambiente, dell'acqua. Si ha ⇒ $\eta \simeq 10^{-3}$ Pa·s, $K = 0.6$ W/m·K, $\beta \simeq 2\cdot 10^{-4}\ K^{-1}$ ⇒ $Br \simeq \eta\beta g/K \cdot h \simeq 10^{-6}\cdot h$ ovvero anche per una colonna di metri è un numero $\ll 1$ che va confrontato con $\nabla'^2\vartheta \sim 1$ ed è perciò trascurabile.

⊛ In uno dei suoi esempi di sintesi quasi ermetica, Landau fa notare che coi parametri delle eq. in approssimazione di Boussinesq si possono formare diverse combinazioni di numeri adimensionali, e in alternativa a Gr suggerisce il numero di Rayleigh Ra,

$$Ra \doteq \frac{\beta g \Delta T h^3}{\nu\chi} = \frac{\nu}{\chi}\frac{\beta g \Delta T h^3}{\nu^2} = Pr \cdot Gr$$

e di cui noi comuni mortali vediamo di esplicitare meglio il significato. È intuitivo osservarne la caratteristica di un confronto tra fenomeno convettivo, dovuto al riscaldamento (che si vede nel numeratore), e fenomeno conduttivo, o diffusivo che dir si voglia, con il coeff. χ al denominatore. Più in dettaglio, se consideriamo che il moto convettivo è sostenuto dal gradiente di temperatura e ostacolato dalla viscosità, possiamo stimare la velocità tipica del moto convettivo confrontando, nell'eq. di Boussinesq, i termini $\chi\nabla^2\vec{v}$ e $\beta T\vec{g}$:

$$\nu \nabla^2 \bar{v} \sim \nu u/h^2 \quad \text{vs} \quad \beta \Delta T \bar{g} \sim \beta g \Delta T$$

$$\Downarrow$$

$$u \simeq \beta g \Delta T h^2/\nu$$

da cui il tempo caratteristico del processo convettivo $\underline{\tau_{conv}} \sim h/u$ è $\sim \underline{\nu/\beta g \Delta T h}$ (cioè il tempo caratteristico del trasporto termico tramite convezione).(*)

Invece il tempo caratteristico del trasporto termico tramite conduzione (diffusione) del calore si stima da $\frac{\partial T}{\partial t} \sim \frac{T}{\tau_{diff}}$ vs. $\chi \nabla^2 T \sim \chi \frac{T}{h^2}$

da cui $\underline{\tau_{diff} \sim h^2/\chi}$.

Perciò abbiamo che il # di Rayleigh si può definire come il rapporto tra questi due tempi

$$Ra = \frac{\tau_{diff}}{\tau_{conv}} = \frac{\beta g \Delta T h^3}{\nu}$$

(ovvero anche il rapporto tra il flusso convettivo e quello conduttivo di calore: tanto più alto Ra, tanto maggiore è il flusso termico convettivo).

⊛ Scritte pertanto le eq. in forma adimensionata, si può dire che le soluzioni siano funzioni

$$\bar{v}(\bar{x},t) = u\,\bar{v}'(\bar{x}/h,\ t/(h/u),\ Gr,\ Pr)$$

$$T(\bar{x},t) = T'(\bar{x},t) + T_0 = T_0 + \Delta T\, \vartheta(\bar{x}/h,\ t/(h/u),\ Gr,\ Pr)$$

Invece di Gr si potrebbe equivalentemente usare Ra. Si noti inoltre che $\bar{v}$ dipende da Pr, sebbene questo numero non appaia nell'eq. di Boussinesq, perché in essa è contenuta comunque la temperatura, che invece vi dipende esplicitamente tramite l'eq. del calore. Con la velocità caratteristica u si intende sempre la quantità derivata, $u = \sqrt{\beta g \Delta T h}$. Landau la esprime sotto un'altra forma di adimensionalizzazione possibile e non infrequente, ossia

$$u' = \nu/h$$

(*) = il confronto tra i due termini è effettivamente un bilancio tra forze viscose, $F_d \sim \tau h^2 \sim \eta \frac{\partial v_i}{\partial x_j} h^2 \sim \eta u h$, e spinta di galleggiamento $F_b \sim \Delta \rho l^3 g \sim \rho \beta \Delta T g l^3$: $\eta u h \sim \rho \beta \Delta T g h^3 \Rightarrow u \sim \beta g \Delta T h^2/\nu$

il che è legittimo, tuttavia se si confronta con la u caratteristica della convezione,

$$\frac{u'^2}{u^2} = \frac{\nu}{h} \Big/ \beta g \Delta T h^2/\nu = Gr$$

$(\bar{v}' \sim \sqrt{Gr})$

ovvero questo porta a velocità adimensionate $\bar{v}'$ non necessariamente di ordine unitario, e così le loro derivate come visibile se utilizziamo questa u' per adimensionare le eq.:

$$\frac{u'^2}{h}\frac{\partial \bar{v}'}{\partial t'} + \frac{u'^2}{h}(\bar{v}' \cdot \mathrm{grad}')\bar{v}' = -\frac{1}{\rho_0}\rho_0\frac{u'^2}{h}\,\mathrm{grad}'\bar{\pi} + \nu\frac{u'}{h^2}\nabla'^2\bar{v}' + \beta g \Delta T \vartheta \hat{e}_z$$

e moltiplicando tutto per $\frac{h}{u'^2} = \frac{h^3}{\nu^2}$ si ha

$$\frac{\partial \bar{v}'}{\partial t'} + (\bar{v}' \cdot \mathrm{grad}')\bar{v}' = -\mathrm{grad}\bar{\pi} + \nabla'^2\bar{v}' + \frac{\beta g \Delta T h^3}{\nu^2}\vartheta \hat{e}_z \quad \rightarrow Gr$$

ovvero $\boxed{\frac{\partial \bar{v}'}{\partial t'} + (\bar{v}' \cdot \mathrm{grad}')\bar{v}' = -\mathrm{grad}\bar{\pi} + \nabla'^2\bar{v}' + Gr\,\vartheta \hat{e}_z}$

(e qui si vede dal confronto che $\nabla'^2\bar{v}' \sim Gr$, non certo di ordine unitario); similmente, nell'eq. del calore

$$\frac{u'}{h}\Delta T\frac{\partial \vartheta}{\partial t'} + \frac{u'}{h}\Delta T(\bar{v}' \cdot \mathrm{grad}')\vartheta = \frac{\chi}{h^2}\Delta T\nabla'^2\vartheta + \frac{\nu}{2c_p}\frac{u'^2}{h^2}S'_{ij}S'_{ij}$$

che, moltiplicata per $h/u'\Delta T$ dà

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t'} + (\bar{v}' \cdot \mathrm{grad}')\vartheta = \frac{\chi}{u'h}\nabla'^2\vartheta + \frac{\nu}{2c_p}\frac{u'}{h\Delta T}S'_{ij}S'_{ij}$$

e con $u' = \frac{\nu}{h}$, $\frac{\chi}{u'h} = \frac{\chi}{\nu} = \frac{1}{Pr}$ $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{\partial \vartheta}{\partial t'} + (\bar{v}' \cdot \mathrm{grad}')\vartheta = \frac{1}{Pr}\nabla'^2\vartheta + \frac{\nu^2}{2c_p\Delta T h^2}S'_{ij}S'_{ij}}$$

(che quantomeno è relativamente pratica se si può trascurare il termine di dissipazione viscosa, altrimenti contiene l'ingombrante quantità a fattore).