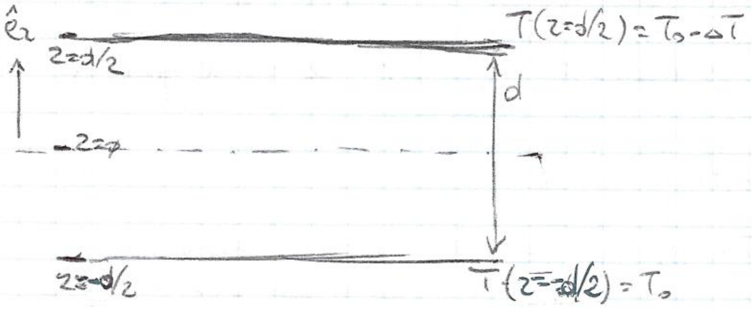
Instabilità di Rayleigh-Bénard

Studiamo il caso di un moto convettivo stazionario che si instaura quando uno strato piano di fluido ha un gradiente verticale di temperatura causato dal riscaldamento da sotto, per cui la temperatura della frontiera inferiore è a valore costante T_0 e quella della frontiera superiore è $T_0 - \Delta T$ (cfr. figura).



Entro un certo limite di gradiente di T, lo scambio termico avviene per sola conduzione, dunque il fluido è fermo ($\vec{v} = \phi$) e le eq. in approx di Boussinesq sono:

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} p' - \beta T' \vec{g} = \phi \\ \chi \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \phi \end{cases}$$

dove ricordiamo che $T(z) = T_0 + T'(z)$

$p(z) = p_0 + p'(z)$

con T', p' le perturbazioni (rispetto ai valori omogenei) associate alla conduzione.

I bordi del dominio $z = \pm d/2$ possono essere due pareti rigide (per cui si ha una b.c. di no slip) oppure interfacce con altri fluidi, per esempio un fluido più pesante sotto e uno leggero (aria) sopra, assimilabili anche a condizioni di free slip; finché in regime conduttivo, ciò non è comunque rilevante, perché $\vec{v}(x,y,z) = \phi$ ovunque.

Abbiamo anche ragionevolmente assunto che in questo regime vi sia dipendenza di T, p solo dalla coordinata verticale.

Integrando l'eq. del calore si ha

$$T(z) = Az + B \quad ; \quad \text{con le b.c.}$$

$$\left.\begin{aligned} T(-d/2) &= T_0 = -Ad/2 + B \\ T(d/2) &= T_0 - \Delta T = Ad/2 + B \end{aligned}\right\} \overset{\text{sommando}}{\Longrightarrow} 2T_0 - \Delta T = 2B \Rightarrow \boxed{B = T_0 - \Delta T/2}$$

e sottraendo $\Delta T = -Ad \Rightarrow A = -\Delta T/d$

ovvero $T(z) = -\Delta T\, z/d + T_0 - \Delta T/2$

o meglio $T(z) = T_0 - \frac{\Delta T}{d}(z + d/2) = \underline{\underline{T_0 - \Gamma(z+d/2)}}$ (e volendo ne segue $p(z)$)

con $\Gamma \doteq \Delta T/d$ che dà la scala del gradiente di temperatura, anzi in questo caso essendo la decrescita lineare si può proprio dire $\Gamma \doteq -\partial T/\partial z$ $(\forall z)$.

Se ora consideriamo che per effetto del gradiente di T si inneschi un moto convettivo, esso si rappresenta come ulteriore perturbazione $\bar{v}''$, T'', p'' per cui le grandezze complessive saranno

$$\underset{\sim}{\bar{v}}(\bar{x},t) = \phi + \bar{v}''(\bar{x},t)$$

$$\underset{\sim}{T}(\bar{x},t) = T(z) + T''(\bar{x},t)$$ (con $T(z)$ quella ricavata sopra per il caso conduttivo)

$$\underset{\sim}{p}(\bar{x},t) = p(z) + p''(\bar{x},t)$$ (idem)

sempre rispondenti alle eq. in approx di Boussinesq

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \underset{\sim}{\bar{v}}}{\partial t} + (\underset{\sim}{\bar{v}}\cdot\text{grad})\underset{\sim}{\bar{v}} = -\dfrac{1}{\rho_0}(\text{grad}\, p'+p'') - \beta(T'+T'')\bar{g} + \nu\nabla^2\underset{\sim}{\bar{v}} \\ \dfrac{\partial \underset{\sim}{T}}{\partial t} + (\underset{\sim}{\bar{v}}\cdot\text{grad})\underset{\sim}{T} = \chi\nabla^2\underset{\sim}{T} \\ \text{div}\,\underset{\sim}{\bar{v}} = \phi \end{cases}$$

e sottraendovi le eq. per il caso conduttivo si ha il sistema per la perturbazione convettiva:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{v}''}{\partial t} + (\bar{v}''\cdot\text{grad})\bar{v}'' = -\dfrac{1}{\rho_0}\text{grad}\, p'' - \beta T''\bar{g} + \nu\nabla^2\bar{v}'' \\ \dfrac{\partial T''}{\partial t} + \underbrace{(\bar{v}''\cdot\text{grad})(T_0 - \Gamma(z+d/2) + T'')}_{\hookrightarrow\, = -\Gamma v_z'' + (\bar{v}''\cdot\text{grad})T''} = \chi\nabla^2 T'' \\ \text{div}\,\bar{v}'' = \phi \end{cases}$$

Questo si può linearizzare eliminando i termini di ordine superiore al primo (cioè i $(\bar{v}''\cdot\text{grad})$), considerando piccole perturbazioni:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{v}''}{\partial t} = -\dfrac{1}{\rho_0}\text{grad}\, p'' - \beta T''\bar{g} + \nu\nabla^2\bar{v}'' \\ \dfrac{\partial T''}{\partial t} - v_z''\Gamma = \chi\nabla^2 T'' \\ \text{div}\,\bar{v}'' = \phi \end{cases}$$

Si può manipolare l'eq. di Boussinesq così da eliminarvi il termine $\text{grad}\,p''$. Applicando il laplaciano alla componente z dell'eq. si ha

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 v_z'' = -\frac{1}{\rho_0}\nabla^2\frac{\partial p''}{\partial z} + \beta g \nabla^2 T'' + \nu \nabla^4 v_z''$$

mentre applicando all'eq. di Boussinesq la divergenza si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\operatorname{div}\bar{v}''}_{\phi} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla^2 p'' + \beta g \frac{\partial T''}{\partial z} + \nu \nabla^2 \underbrace{(\operatorname{div}\bar{v}'')}_{\phi}$$

da cui $-\frac{1}{\rho_0}\nabla^2 p'' = -\beta g \frac{\partial T''}{\partial z}$ e $\Rightarrow$ $-\frac{1}{\rho_0}\nabla^2\frac{\partial p''}{\partial z} = -\beta g \frac{\partial^2 T''}{\partial z^2}$ che reinserita nell'eq. per la componente z dà

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 v_z'' = \beta g\left(\nabla^2 T'' - \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \nu \nabla^4 v_z''$$

Definendo $\nabla_H^2 \doteq \nabla^2 - \partial^2/\partial z^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ operatore laplaciano "orizzontale",

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 v_z'' = \beta g \nabla_H^2 T'' + \nu \nabla^4 v_z''}$$

Le b.c. per la perturbazione ora devono considerare esplicitamente una interfaccia ben determinata perché c'è una velocità. Consideriamo no slip su pareti rigide. Dunque

$T''(x,y,z=\pm d/2)$

$\bar{v}''(x,y,z=\pm d/2) = \phi$ ($v_z = \phi$: no penetrazione; $v_x = v_y = \phi$: no slip)

ma poiché anche $\operatorname{div}\bar{v}'' = \phi$ $\forall x,y$ e $v_x = v_y = \phi$ in $z = \pm d/2$ $\forall x,y$,

$\Rightarrow \operatorname{div}\bar{v}''\Big|_{z=\pm d/2} = \partial v_z''/\partial z\Big|_{z=\pm d/2} = \phi$.

Complessivamente le b.c. sono dunque $T'' = v_x'' = v_y'' = v_z'' = \partial v''/\partial z = \phi$ in $z = \pm d/2$.

Prima di giungere a un'ipotesi di soluzione, passiamo alle eq. in forma adimensionata. Dal confronto del termine avvettivo e di $\nabla^2 T''$ nell'eq. del calore si può avere una scala di velocità:

$$v_z''\Gamma \sim \chi\nabla^2 T''$$

$$v_z''\frac{\Delta T}{d} \sim \chi\frac{1}{d^2}\Delta T \Rightarrow v_z'' \sim \chi/d$$

e similmente si ricava una scala temporale dal confronto :

$$\partial T''/\partial t \sim \chi\nabla^2 T''$$

$$\frac{\Delta T}{\tau} \sim \chi\frac{\Delta T}{d^2} \Rightarrow \tau \sim d^2/\chi$$

dunque normalizziamo ottenendo quantità adimensionate

$$w = v_z'' / (\chi/d)$$
$$t_p = t / (d^2/\chi)$$
$$T_p = T'' / \Delta T$$
$$\bar{x}_p = \bar{x}/d$$

e così anche operatori differenziali normalizzati

$$\partial / \partial x_{i_p} = d \cdot \partial / \partial x_i$$
$$\nabla_p = d \nabla \quad ; \quad \nabla_p^2 = d^2 \nabla^2 \quad ; \quad \nabla_{H_p}^2 = d^2 \nabla_H^2$$

Nel seguito per semplicità di notazione omettiamo sempre il pedice "p", ricordando che si lavora con sole quantità riscalate. La normalizzazione procede dunque come segue:

$$\circledast \quad \frac{\chi}{d^2} \cdot \frac{1}{d^2} \cdot \frac{\chi}{d} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w = \beta g \frac{1}{d^2} \Delta T \nabla_H^2 T + \frac{\nu}{d^4} \frac{\chi}{d} \nabla^2 w$$

$$\Rightarrow \frac{\chi^2}{d^3} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w = \beta g \Delta T \nabla_H^2 T + \frac{\nu \chi}{d^3} \nabla^4 w$$ che moltiplicata per d^3/χ^2 dà

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w = \frac{\beta g \Delta T d^3}{\chi^2} \nabla_H^2 T + \frac{\nu}{\chi} \nabla^4 w \qquad \frac{\nu}{\chi} \to Pr$$

$$\frac{\beta g \Delta T d^3}{\chi^2} = \frac{\beta g \Delta T d^3}{\chi \nu} \cdot \frac{\nu}{\chi} = Ra \cdot Pr$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w = Pr \left(Ra \nabla_H^2 T + \nabla^4 w \right)}$$ oppure

$$\boxed{\left(\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) \nabla^2 w = Ra \nabla_H^2 T}$$

$$\circledast \quad \frac{\chi}{d^2} \Delta T \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\chi}{d} \Gamma w = \frac{\chi}{d^2} \Delta T \nabla^2 T$$ che moltiplicato per $d^2/\chi \Delta T$ dà

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{d^2}{\chi \Delta T} \frac{\chi}{d} \Gamma w + \nabla^2 T$$ ovvero, dato $\Gamma = \Delta T / d$,

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T + w}$$ oppure $$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) T = w}$$

$\circledast$ le b.c. normalizzate risultano $T = w = \partial w / \partial z = \emptyset$ in $z = \pm 1/2$.

Facciamo un'ipotesi sulla forma generale della soluzione. Supponendo già una separazione delle variabili in una funzione della sola z per una delle altre variabili, diciamo

$$w(\vec{x},t) = \hat{w}(z)\exp(ilx + imy + \sigma t) = \hat{w}(z)\exp(i\vec{k}\cdot\vec{x} + \sigma t)$$
$$T(\vec{x},t) = \hat{T}(z)\exp(ilx + imy + \sigma t) = \hat{T}(z)\exp(i\vec{k}\cdot\vec{x} + \sigma t)$$

con $\vec{k} = (l, m, \phi)$ vettore d'onda, di ampiezza $k = (l^2+m^2)^{1/2}$;

l, m reali, affinché la soluzione sia finita per $x, y \to \pm\infty$ (altrimenti si ha un esponenziale reale e potenzialmente una divergenza);

σ in generale ammesso come numero complesso $\sigma = \sigma_{re} + i\sigma_{im}$; ciò significa che un $\sigma_{im} \neq \phi$ comporta una funzione exp immaginaria di spazio e tempo $\Rightarrow$ ondulatoria, mentre σ_{re} dà un esponenziale reale nel tempo e cioè è un tasso di crescita ($\sigma_{re} > \phi$) o di smorzamento ($\sigma_{re} < \phi$). Per $\sigma_{re} = \phi$ si ha il caso limite di stabilità marginale, ovverosia uno stato stazionario (se $\sigma_{im} = \phi$) o di perturbazioni ondulatorie che sono stabili, senza crescita né smorzamento ma persistenti ($\sigma_{im} \neq \phi$).

Sostituiamo le ipotesi di soluzione nelle eq. del sistema; poiché

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -l^2\hat{w}(z)\exp(\ldots)\ ; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -m^2\hat{w}(z)\exp(\ldots)\ ; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{d^2\hat{w}}{dz^2}\exp(\ldots)$$

e similmente per T, ricaviamo equazioni in $\hat{w}, \hat{T}$ con operatori

$$\nabla^2 \to -l^2 - m^2 + d^2/dz^2 = -k^2 + d^2/dz^2\ ; \quad \nabla_H^2 \to -k^2$$

e allo stesso modo $\partial/\partial t \to \sigma$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{Pr}\sigma + k^2 - \frac{d^2}{dz^2}\right)\left(k^2 - \frac{d^2}{dz^2}\right)\hat{w}(z) = Ra\,k^2\,\hat{T}(z) \\ \left(\sigma + k^2 - \frac{d^2}{dz^2}\right)\hat{T}(z) = \hat{w}(z) \\ + \text{b.c. } \hat{w} = d\hat{w}/dz = \hat{T} = \phi \quad \text{in } z = \pm 1/2 \end{cases}$$

Si può verificare* che a valori di $Ra > \phi$ corrispondono σ puramente reali, dunque non ci sono soluzioni ondulatorie nel problema trattato, ma solo divergenti, smorzate o, nel caso mar-

---

*: cfr. S. Chandrasekhar "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability", OUP (1961) o Dover (1981)
oppure P. G. Drazin, W.H. Reid "Hydrodynamic Stability", Cambridge University Press (2004)
oppure P.K. Kundu, I.M. Cohen, "Fluid Mechanics", Academic Press (seconda ed. 2001 o più recenti)

ginalmente stabile $\sigma_{re} = \sigma = \phi$, soluzione stazionaria. Ricordiamo che qui vogliamo appunto indagare questo tipo di possibilità e ponendo $\sigma = \phi$ otteniamo le eq. semplificate

$$\left(k^2 - \frac{d^2}{dz^2}\right)^2 \hat{w}(z) = Ra\, k^2\, \hat{T}(z)$$

$$\left(k^2 - \frac{d^2}{dz^2}\right) \hat{T}(w) = \hat{w}(z)$$

e inserendo $\hat{T}(z)$ dalla prima eq. nella seconda si ricava

$$\begin{cases} \left(k^2 - \frac{d^2}{dz^2}\right)^3 \hat{w}(z) = Ra\, k^2\, \hat{w}(z) \\ + \text{b.c.}\ \hat{w} = d\hat{w}/dz = \left(d^2/dz^2 - k^2\right)^2 \hat{w}(z) = \phi \quad \text{in} \quad z = \pm 1/2 \end{cases}$$

che esprime la b.c. $\hat{T}(\pm 1/2) = \phi$

Abbiamo dunque un'equazione differenziale omogenea del sesto ordine, un'eq. agli autovalori la cui soluzione è legata a Ra e k o meglio esprime un legame tra Ra e k [i coefficienti nella soluzione, al solito, saranno determinati imponendo le b.c. specificate (che sono, coerentemente, in numero di sei)]; ricordiamo che questa è la soluzione di stabilità marginale, ovvero quel che troviamo come legame $Ra(k)$ è un valore che delimita, dato k, i valori di Ra per cui il fenomeno è stabile ($Ra <$ del valore trovato come $Ra(k)$) o instabile ($Ra >$, e quindi insorge l'instabilità). Questa relazione $Ra(k)$ ha un minimo, che indica il <u>valore critico</u> Ra_{cr}, corrispondente a un certo modulo k_{cr} del vettore d'onda $\bar{k}$, al quale inizia l'instabilità, cioè si sostiene ($Ra = Ra_{cr}$) o si amplifica ($Ra > R_{cr}$) una perturbazione anche infinitesima nel flusso che abbia come scala di lunghezza orizzontale k_{cr} (numero d'onda critico). Aumentando Ra, si amplia la gamma di numeri d'onda (lunghezze d'onda) secondo cui possono crescere le perturbazioni dei campi di velocità e temperatura.

La forma delle autofunzioni $\hat{w}(z)$ è suggerita dalla simmetria del problema rispetto al piano $z = \phi$; dunque la soluzione è una composizione di autofunzioni che sono simmetriche rispetto a $z = \phi$ (classe di autofunzioni pari) e di autofunzioni antisimmetriche rispetto a $z = \phi$ (classe di autofunzioni dispari in z).

La forma generale della soluzione si può scrivere come composizione di funzioni dalla forma

$$\hat{w}(z) = \exp(\pm qz)$$

dove $q \in \mathbb{C}$ sono sei radici dell'eq. algebrica ottenuta sostituendo la forma ipotizzata nell'eq.

$$\left(k^2 - \frac{d^2}{dz^2}\right)^3 \hat{w}(z) = Ra\,k^2\,\hat{w}(z) \longrightarrow (k^2-q^2)^3 = Ra\,k^2 ;$$

chiamando $\tau^3 = Ra/k^4$ le tre soluzioni per q^2, dette $q_0^2 (\in \mathbb{R})$, q_1^2 e $q_2^2 = q_1^{2*}$ sono

$$q_0^2 = -k^2(\tau - 1)$$

$$q_{1,2}^2 = k^2\left[1 + \frac{1}{2}\tau(1 \pm i\sqrt{3})\right]$$

da cui le sei radici sono infine

$$\pm i q_0 \doteq \pm i\,(q_0^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\pm q = \pm (q_1^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\pm q^* = \pm (q_2^2)^{\frac{1}{2}} = \pm (q_1^{2*})^{\frac{1}{2}}$$

a) Le soluzioni di tipo pari si possono perciò scrivere come

$$\hat{w}(z) = \alpha_0[\exp(iq_0z) + \exp(-iq_0z)] + \alpha[\exp(qz) + \exp(-qz)] + \alpha^*[\exp(q^*z) + \exp(q^*z)] =$$

$$= A_0\cos(q_0z) + A\cosh(qz) + A^*\cosh(q^*z)$$

con $A_0 \in \mathbb{R}$; $A, A^* \in \mathbb{C}$ costanti da determinare imponendo le b.c.

$$\begin{cases} \hat{w}(\pm 1/2) = \phi \longrightarrow A_0\cos(q_0/2) + A\cosh(q/2) + A^*\cosh(q^*/2) = \phi \\ d\hat{w}/dz\big|_{\pm 1/2} = \phi \longrightarrow -A_0q_0\sin(q_0/2) + Aq\sinh(q/2) + A^*q^*\sinh(q^*/2) = \phi \\ (d^2/dz^2 - k^2)^2\hat{w}\big|_{\pm\frac{1}{2}} = \phi \longrightarrow A_0(q_0^2+k^2)^2\cos(q_0/2) + A(q^2+k^2)^2\cosh(q/2) + A^*(q^{*2}+k^2)^2\cosh(q^*/2) = \phi \end{cases}$$

(Si noti che $\hat{w}$ è una somma di funzioni tutte pari, ⇒ le b.c. in $z = +\frac{1}{2}$ o $z = -\frac{1}{2}$ danno la stessa condizione in realtà). Messe in forma di sistema lineare omogeneo per $\bar{A} = [A_0; A; A^*]$,

$\underline{\underline{M}}\,\bar{A} = \phi$ con

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} \cos(q_0/2) & \cosh(q/2) & \cosh(q^*/2) \\ -q_0\sin(q_0/2) & q\sinh(q/2) & q^*\sinh(q^*/2) \\ (q_0^2+k^2)^2\cos(q_0/2) & (q^2+k^2)^2\cosh(q/2) & (q^{*2}+k^2)^2\cosh(q^*/2) \end{bmatrix}$$

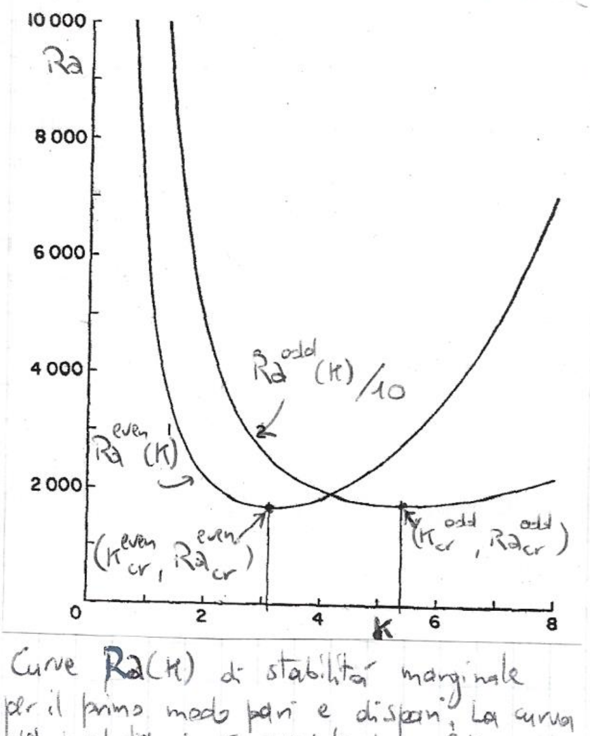
per avere una soluzione non banale ($\bar{A} = \phi$) si deve richiedere $\boxed{\det(\underline{\underline{M}}) = \phi}$, che risulta un'eq. trascendente con risoluzione numerica; la cosa essenziale, come già detto, e' che la soluzione dell'eq. risulta una relazione $Ra(K)$, curva che delimita le regioni di stabilità e instabilità. Il minimo della curva si ha per i valori critici

$$Ra_{cr} = 1707.762 \quad , \quad K_{cr} = 3.117 \rightsquigarrow \lambda_{cr} = 2\pi d / K_{cr} = 2.016\, d$$

b) Le soluzioni di tipo dispari, in maniera analoga, si scrivono nella forma

$$\hat{w}(z) = A_0 \sin(q_0 z) + A \sinh(qz) + A^* \sinh(q^* z)$$

e il procedimento per determinare la soluzione e' fatto alla stessa maniera; esso porta ad un'altra relazione $Ra(K)$ con un minimo a valore molto maggiore di Ra ($Ra_{cr}^{odd} \simeq 10\, Ra_{cr}^{even}$); detto in altre parole, come intuibile il modo fondamentale e' il più basso modo pari, con autofunzione simmetrica rispetto a $z=0$ e senza nodi nel dominio $z \in (-d/2; d/2) \rightarrow$ la velocità verticale si annulla solo agli estremi. Si ha dunque una sola serie di celle convettive affiancate con periodicità orizzontale λ_{cr} (per il primo modo dispari si avrebbero due strati verticali di celle).

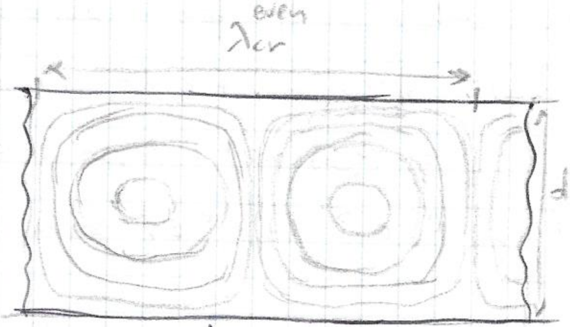


Curve $Ra(K)$ di stabilità marginale per il primo modo pari e dispari. La curva del modo dispari e' riscalata di un fattore 10. Valori critici:

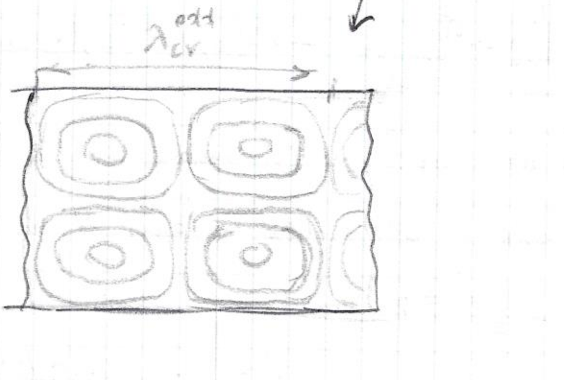
$K_{cr} = 3.117$, $Ra_{cr} = 1707.762$ (pari)

$K_{cr} = 5.365$, $R_{cr} = 17610.39$ (dispari)

[Fonte: W.H. Reid, D.L. Harris, "Some Further Results on the Bénard Problem, Phys. Fluids 1, 102 (1958)]



Pattern di celle per il modo fondamentale pari e dispari



Consideriamo anche, visto che oltretutto e' di soluzione più agevole (ottenibile in forma analitica), il caso di condizioni di free slip sulle superfici $z=\pm d/2$, ovvero assenza di attrito. Le b.c. si formalizzano come

$$v_z''(\pm d/2)=\phi \ ; \quad \tau''(\pm d/2)=\phi ; \quad \mu\left(\frac{\partial v_x''}{\partial z}+\frac{\partial v_z''}{\partial x}\right)\Big|_{z=\pm d/2}=\phi ; \quad \mu\left(\frac{\partial v_y''}{\partial z}+\frac{\partial v_z''}{\partial y}\right)\Big|_{z=\pm d/2}=\phi$$

ma poiché $v_z''(x,y,\pm d/2)=\phi \Rightarrow \frac{\partial v_x''}{\partial z}=\frac{\partial v_y''}{\partial z}=\phi$ in $z=\pm d/2$

$\Rightarrow$ le b.c. sugli sforzi di taglio si riducono a $\frac{\partial v_x''}{\partial z}=\frac{\partial v_y''}{\partial z}=\phi$ in $z=\pm d/2$;

derivando in z la condizione $\operatorname{div}\vec{v}''=\phi$,

$$\frac{\partial^2 v_x''}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 v_y''}{\partial z\partial y}+\frac{\partial^2 v_z''}{\partial z^2}=\phi \Rightarrow \text{in } z=\pm d/2 \quad \frac{\partial^2 v_z''}{\partial z^2}=\phi$$

e infine le b.c. del sistema normalizzato sono

$$\hat{w}=(d^2/dz^2-k^2)^2\hat{w}=d^2\hat{w}/dz^2=\phi \quad \text{in } z=\pm 1/2$$

ma si noti che $\left(\frac{d^2}{dz^2}-k^2\right)^2\hat{w}\Big|_{\pm\frac{1}{2}}=\phi$, svolta, porta a $\frac{d^4\hat{w}}{dz^4}\Big|_{\pm\frac{1}{2}}=\phi$; se si applica ancora d^2/dz^2 si ha che anche $d^6\hat{w}/dz^6\Big|_{\pm\frac{1}{2}}=\phi$ e così per tutte le derivate pari di $\hat{w}$ in $z=\pm\frac{1}{2}$.

Perciò si deve concludere che le autofunzioni di

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}-k^2\right)^3\hat{w}(z)=Ra\,k^2\hat{w}(z),$$

avendo valore e derivate pari $=\phi$ agli estremi, sono del tipo

$$\hat{w}(z)=A\sin(n\pi z), \quad \text{con } A \text{ costante e } n \text{ intero},$$

forma che, sostituita nell'eq. differenziale, fornisce l'eq. algebrica

$$(k^2+n^2\pi^2)^3=Ra\,k^2 \Rightarrow \boxed{Ra=\frac{(k^2+n^2\pi^2)^3}{k^2}}$$

Il valore critico Ra_{cr}, essendo il minimo, si deve avere per il modo fondamentale $n=1$ e si determina annullando la derivata prima di Ra in k^2 (o k):

$$\frac{d}{d(k^2)}Ra=\frac{3(k^2+n^2\pi^2)^2}{k^2}-\frac{(k^2+n^2\pi^2)^3}{k^4}=\phi$$

$$\Rightarrow 3k^2-k^2+n^2\pi^2=\phi \quad \Rightarrow k^2=n^2\pi^2/2 ;$$

con $n=1$, si ha $k_{cr}=\pi/\sqrt{2}$ $\quad (\lambda_{cr}=2\pi d/k_{cr}=2\sqrt{2}d)$

$$\text{e} \quad Ra_{cr}=(\pi^2/2+\pi^2)^3/(\pi^2/2)=\frac{27}{4}\pi^4=657.511$$

Se vogliamo pensare al caso misto con un boundary solido (per esempio sotto) e uno libero (sopra), osserviamo che i modi dispari del caso a b.c. di no slip soddisfano le condizioni miste se prendiamo $z=-\frac{1}{2}$ e $z=\phi$, rispettivamente, cioè possiamo prendere quel risultato considerando uno strato di spessore dimezzato; date le dipendenze $K \propto 1/d$, $Ra \propto d^4$, si ricavano direttamente i valori critici

$$K_{cr} = 5.365/2 = 2.682 \quad , \quad Ra_{cr} = 17610.39/2^4 = 1100.65$$

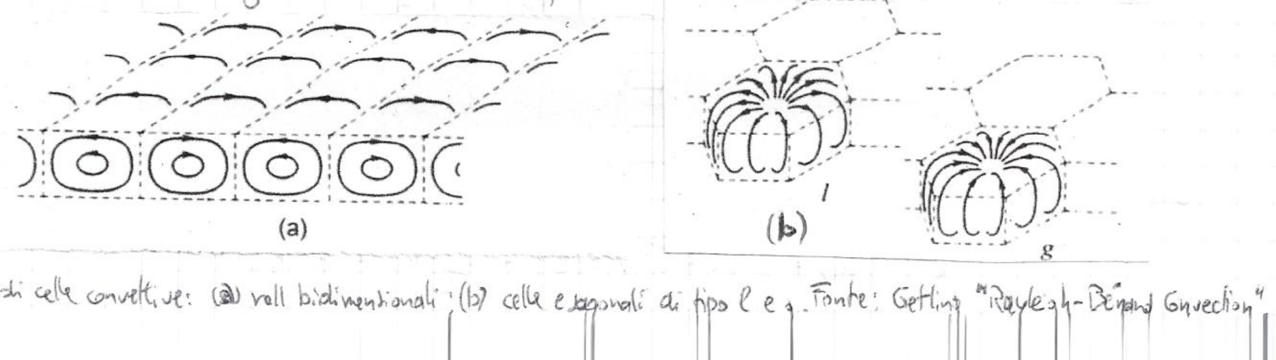
Qualche osservazione conclusiva.

* La teoria così presentata è un'analisi lineare di stabilità; le osservazioni sperimentali hanno dato risultati molto vicini alle predizioni teoriche, fatto tanto più rimarchevole se appunto si considera che sono predizioni basate su una linearizzazione.
* Va ricordato che $K^2 = \ell^2+m^2$, ovvero il numero d'onda si può scomporre teoricamente in infiniti modi diversi nelle componenti x e y. Del resto non abbiamo risolto il problema per le componenti x e y del campo di velocità (e temperatura). Chi è interessato a completare la soluzione può trovare dettagli nei testi già citati di Chandrasekhar, di Drazin e Reid, o in quello di A.V. Getling ("Rayleigh-Bénard Convection - Structure and Dynamics", World Scientific, 1998), qui ci limitiamo a riportare che si osservano casi in cui la struttura periodica è

⊕ puramente bidimensionale (del tipo x-z, con invarianza in y): "2D roll";

⊕ a celle esagonali o quadrate nel piano xy.

L'insorgere di una particolare struttura, o del verso in cui va il vettore velocità nelle celle, dipende dalle caratteristiche del caso specifico, come le b.c. in x e y, il valore di Ra, la dipendenza delle proprietà del fluido (la viscosità, per esempio) dalla temperatura. Per esempio, come nella formazione e accrescimento di un cristallo si possono avere diverse zone in cui la stessa struttura è disposta lungo assi non paralleli, così può avvenire a diversi sottodomini di roll.



Esempi di celle convettive: (a) roll bidimensionali; (b) celle esagonali di tipo ℓ e g. Fonte: Getling "Rayleigh-Bénard Convection"