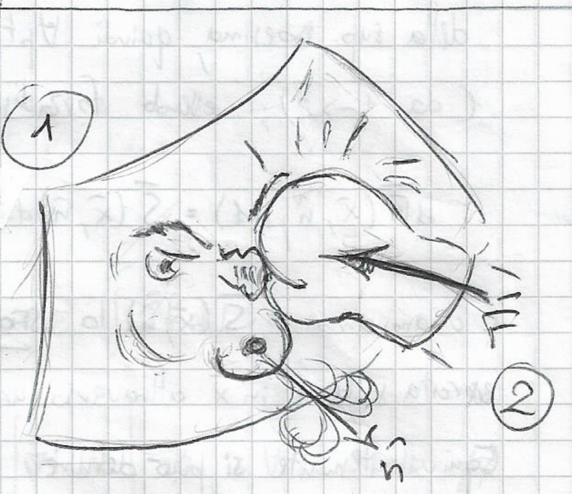
Sforzi - tensore degli sforzi

Forze che si esercitano su di un continuo

Presa una porzione S di diametro (= massimo delle distanze tra coppie di pt della S) infinitesimo di una superficie (ideale o materiale) di due parti di uno stesso continuo, o di due diversi continui, purché adiacenti tra loro, e detta dA l'area di S, le due porzioni separate da S siano 1 e 2, diamo versore normale $\hat{n}$ a S (applicato in $\forall$ pt $\in S$, perché ∞esima $\Rightarrow$ "piatta" e dalle proprietà uniformi). Quali forze sono scambiate tra 1 e 2?

Per convenzione, se 2 esercita forza su 1, consideriamo $\hat{n}$ rivolto da 1 verso 2 (~~da chi subisce~~ → a chi agisce, cfr. figura a lato →).



Ricevuto un cazzottone (forza $\vec{F}$) da ②, la porzione di continuo ① emette il suo flebile lamento (versore normale $\hat{n}$) attraverso la superficie ideale di separazione.

Forze di volume: si esercitano anche tra parti non in contatto tra loro, e sono proporzionali al volume della regione interessata dalla forza.

Esempio: forza gravitazionale

$F_g \propto m$, $m \propto \rho$ densità (uniforme su regione ∞esima) e anche $m \propto V$ volume

$\Rightarrow F_g \propto m = \rho V$ appunto $F \propto$ volume.

Le forze di volume che si scambiano tra loro le parti di continuo sono trascurabili, perché deboli rispetto ad altre interazioni in gioco. Si considera piuttosto la forza gravitazionale esercitata dalla grande massa della Terra, esterna (forza peso). Allo stesso modo, la forza di gravità del continuo stesso può essere rilevante se esso è di scale enormi come continui astrofisici (autogravitanti, come stelle ecc.). Altre forze di volume potrebbero sorgere in caso di fluidi elettricamente carichi (con distribuzioni volumiche di carica).

Forze di superficie (o di contatto): si esercitano solo tra parti in contatto, adiacenti, e sono proporzionali all'area della superficie di contatto tra regioni adiacenti. Questo perché si tratta delle forze intermolecolari quali i legami in solidi o liquidi (per es. forze di Van der Waals tra molecole di un liquido) o gli urti (collisioni) tra le molecole di un gas. Nel primo caso l'azione si esercita sulla scala delle distanze intermolecolari, cioè nanometriche all'incirca; nel caso degli urti, per gas in condizioni normali le scale tipiche possono essere uno o due ordini di grandezza maggiore, ma risultano sempre trascurabili rispetto alle scale spaziali su cui studiamo la materia, macroscopicamente intesa come continuo contenente un elevatissimo numero di costituenti elementari. Perciò l'interazione tra due porzioni di continuo separate da una superficie ideale si esercita su uno spessore la cui scala è nulla, e l'interazione è ben rappresentata come forza superficiale.

Sforzi (stresses)

Considerata una forza di superficie $\bar{F}$ dalla regione 2 alla regione 1, separate da una superficie S di area presa infinitesima dA, $F \propto dA$ per sua stessa definizione, ed essendo infinitesima dA avremo una forza infinitesima $d\bar{F}(\bar{x}, \hat{n}, dA)$, ovvero forza di superficie nel pt $\bar{x} \in dA$ (= $\forall \bar{x} \in dA$ va bene perché è infinitesima) della superficie S dotata di versore normale $\hat{n}$, orientato da 1 a 2.

Essendo forza di superficie si può dire

$$d\bar{F}(\bar{x}, \hat{n}, dA) = \bar{S}(\bar{x}, \hat{n})\, dA$$

e chiamiamo $\bar{S}(\bar{x}, \hat{n})$ lo <u>SFORZO</u> (stress) che la regione 2 esercita sulla 1 in $\bar{x}$ attraverso una superficie di normale $\hat{n}$. Equivalentemente si può definire

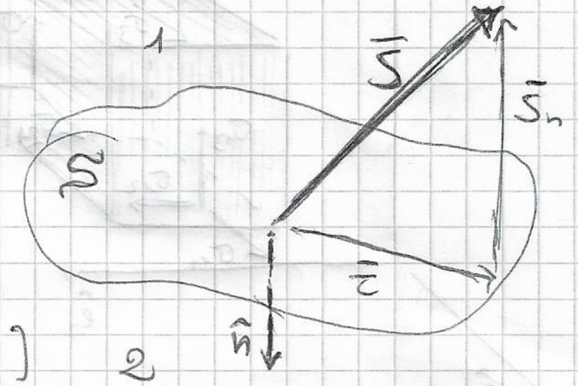
$$\bar{S}(\bar{x}, \hat{n}) = \frac{d\bar{F}(\bar{x}, \hat{n}, dA)}{dA} = \lim_{A \to 0} \frac{F(\hat{n}, A)}{A} \quad \text{con } A \text{ che include sempre } \bar{x}$$

che non rappresenta una derivata, bensì il limite di uno sforzo medio $\langle \bar{S}(\hat{n}) \rangle = \bar{F}(\bar{x}, \hat{n})/A$ nel restringere A fino a infinitesima intorno al pt $\bar{x}$.

Dimensionalmente $[S] = [F][L^{-2}] = [M][L^{-1}][T^{-2}]$, come la pressione, che è uno sforzo, forza/superficie, benché non l'unica. Le u.d.m. sono Newton/metro^2 = Pa Pascal; per l'atmosfera si usa spesso il bar = 10^5 Pa, o l'atmosfera atm = 101325 Pa $\simeq$ 1 bar cioè il valore di p al livello del mare.

Sforzo normale e sforzo tangenziale − Tensore degli sforzi

Lo sforzo sulla sup. $\bar{S}$ è un vettore che può avere orientazione qualsiasi rispetto alla normale $\hat{n}$ della S stessa. Chiamiamo



$$S_n = \bar{S}(\bar{x}, \hat{n}) \cdot \hat{n} \qquad \text{SFORZO NORMALE}$$

$$\left[\text{o il vettore } \bar{S}_n = S_n \hat{n} = \left(\bar{S}(\bar{x}, \hat{n}) \cdot \hat{n}\right) \hat{n} \right]$$

e quel che rimane di $\bar{S}$ sarà nel piano della sup. S stessa (ovvero è la proiezione di $\bar{S}$ sulla superficie S), ed è detto

$$\bar{\tau} = \bar{S}(\bar{x}, \hat{n}) - S_n \hat{n} \quad \left[\text{anche: } \bar{\tau} = \hat{n} \times (\bar{S} \times \hat{n}) \text{, che è } = (\hat{n} \cdot \hat{n}) \bar{S} - (\hat{n} \cdot \bar{S}) \hat{n} = \bar{S} - \bar{S}_n \right]$$

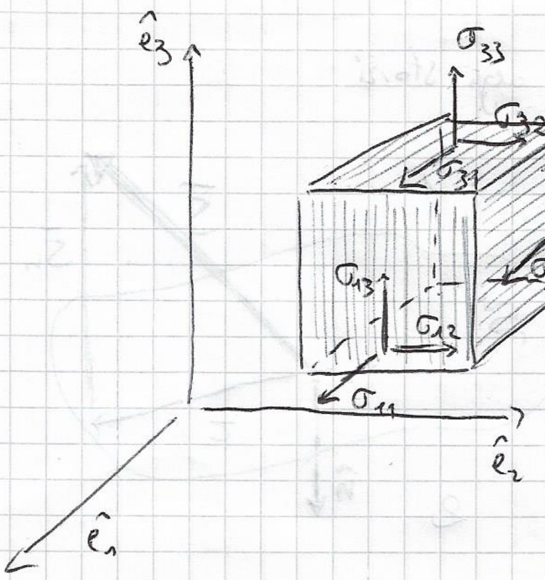
SFORZO TANGENZIALE o DI TAGLIO o SHEAR STRESS

È intuitivo, da pregresse conoscenze, identificare lo sforzo normale con la PRESSIONE.

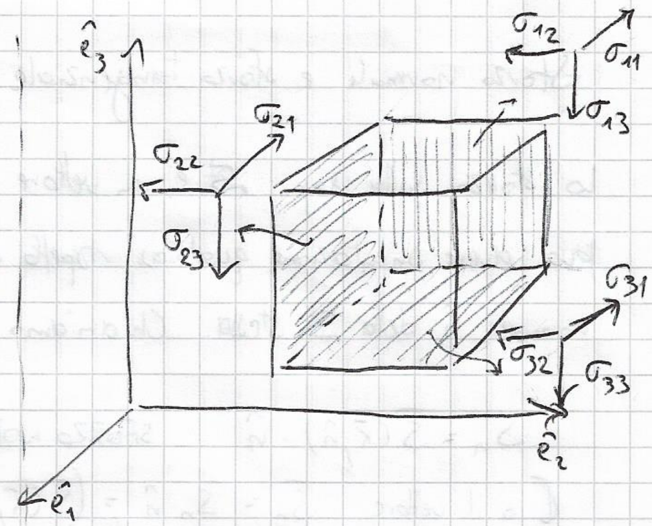
NOTA: dal terzo principio della dinamica si può dire che
se lo sforzo da 2 verso 1 (da dove punta $\hat{n}$) è $\bar{S}(\bar{x}, \hat{n})$
$\Rightarrow$ la 1 esercita su 2 $-\bar{S}(\bar{x}, \hat{n})$.
Per definizione lo sforzo di 1 su 2 è $\bar{S}(\bar{x}, -\hat{n})$

$$\Rightarrow \quad \bar{S}(\bar{x}, -\hat{n}) = -\bar{S}(\bar{x}, \hat{n})$$

Se su di una superficie possiamo osservare uno sforzo vettore a 3 componenti (1 normale e 2 tangenziali), di cosa abbiamo bisogno per definire completamente gli sforzi nel continuo?
Consideriamone un volumetto elementare, così da osservare cosa accade intorno a un pt materiale $\bar{x}$; lo prendiamo come cubetto con le facce lungo gli assi coordinati $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$.
Su ogni faccia di normale lungo $\hat{e}_i$ abbiamo 3 componenti dello sforzo lungo le direzioni $j = 1, 2, 3$, e lo indichiamo $\Rightarrow$ come σ_{ij}. Per esempio sulla faccia con normale lungo $\hat{e}_1$ abbiamo $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$. Si noti che per quanto detto sopra, $\bar{S}(\bar{x}, -\hat{n}) = -\bar{S}(\bar{x}, \hat{n})$ e $\Rightarrow$ sulla faccia opposta si hanno sforzi appunto uguali e opposti (cfr. disegno $\rightarrow$).
Di conseguenza servono 9 di questi σ_{ij} per definire completamente gli sforzi in $\bar{x}$.



Sforzi sulle facce in vista

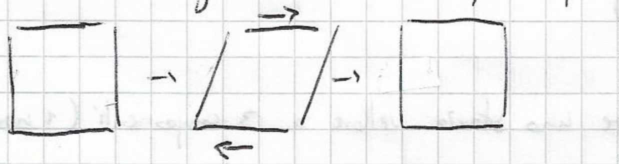


Sforzi sulle facce nascoste

Dunque è necessario un TENSORE DEGLI SFORZI $\underline{\underline{\sigma}}$ di componenti σ_{ij} (con i orientazione della superficie di applicazione, j orientazione della componente dello sforzo su tale sup.). Sono sempre necessarie tutte e 9 le componenti, o esistono casi in cui σ_{ij} ha forma più semplice? Torniamo alla definizione di fluido:

un fluido è un mezzo continuo che non può rimanere in equilibrio se sottoposto a sforzi di taglio.

In ciò il fluido differisce da un solido in regime elastico: quest'ultimo, sotto uno sforzo di taglio ha una deformazione, ma cessato lo sforzo torna alla sua forma originaria (cfr. figura ↓). In un fluido, sottoposto a sforzo anche ∞esimo di taglio, le particelle di fluido acquistano una velocità e non si recupera più l'equilibrio originario; si potrà definire un tensore dei gradienti di velocità Π_{ij} come effetto del tensore degli sforzi σ_{ij} (in generale per un continuo si definisce un tensore di deformazione).



Conclusione: per un fluido in quiete (FLUIDOSTATICA) ci possono essere solo sforzi normali, σ_{ii} ($\sigma_{ij} = \phi$ per $i \neq j$) e il tensore $\underline{\underline{\sigma}}$ è diagonale. Si dimostra qui di seguito che $\underline{\underline{\sigma}}$ non solo è diagonale ma ISOTROPO, ovvero i σ_{ii} sono uguali, o equivalentemente la pressione non è un vettore $\vec{p}$ ($\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$) ma uno scalare e ⇒ assume lo stesso valore in qualsiasi direzione lo si osservi nel fluido.

Nota: σ_{ij} è isotropo anche nel caso di FLUIDO PERFETTO, la cui definizione è fluido in cui tutti i fenomeni sono reversibili. La condizione di reversibilità impone

* assenza di sforzi di taglio, perché comportano attrito
* assenza di conduzione di calore

in quanto entrambe le cose sono causa di irreversibilità.

Dunque poiché $\nexists$ sforzi di taglio, nel fluido perfetto si ha tensore $\underline{\sigma}$ diagonale (e come vediamo dopo, isotropo) anche nel caso dinamico (fluido in moto), non solo statico.

La forma del tensore $\underline{\sigma}$ in generale sarà perciò

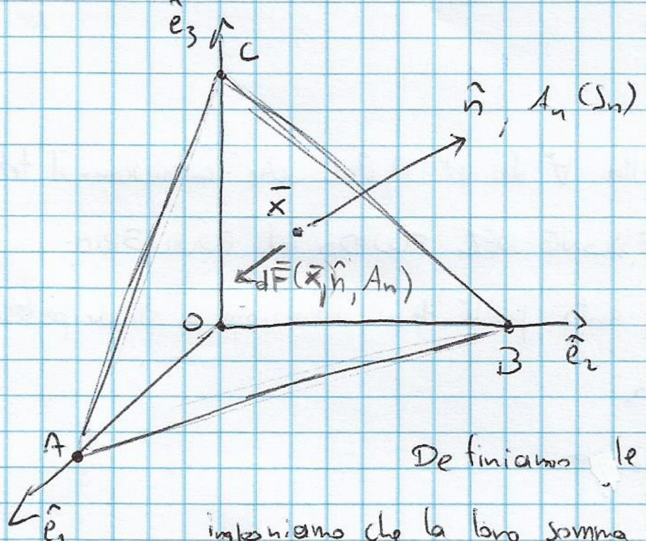
$$\sigma_{ij} = \underbrace{\sigma'_{ij}}_{\text{termine viscoso}} - \underbrace{p\delta_{ij}}$$

$\rightarrow$ termine isotropo di pressione (che agisce contro la normale uscente; il fluido non può esercitare trazione, ma solo compressione)

Fluidostatica

Isotropia della pressione per il fluido in equilibrio (o perfetto)

Consideriamo un fluido in quiete, e dunque sotto posto solo a sforzi normali, e prendiamone un elemento di volume ∞esimo di diametro ℓ in forma di tetraedro con tre facce lungo gli assi coordinati e una quarta sulla quale e' il pt $\bar{x}$ e la cui normale e' $\hat{n}$; le aree delle superfici saranno A_1, A_2, A_3, A_n.



Superficie	Area	Normale
S_1 (BCO)	A_1	$-\hat{e}_1$
S_2 (ACO)	A_2	$-\hat{e}_2$
S_3 (ABO)	A_3	$-\hat{e}_3$
S_n (ABC)	A_n	$\hat{n}$

Definiamo le forze a cui e' sottoposto il volumetto e imponiamo che la loro somma vettoriale sia nulla (prima eq. della statica).

Avremo delle forze di volume, espresse come $\bar{h}(\bar{x})V$ (ovvero $\bar{h}(\bar{x})$ forza per udV) quali la gravità, per esempio, e le forze di superficie, cioe' le pressioni sulle facce. Il fatto di muoversi intorno a $\bar{x}$ di spostamenti infinitesimi, di ordine $O(\ell)$, fa si' che gli errori commessi sulle forze di superficie, che sono $\sim pA$ ovvero $O(\ell^2)$, diano un errore $O(\ell)$ e => termini di ordine $O(\ell^3)$ come quelli delle forze di volume. In definitiva

$$\underbrace{-p(\bar{x},\hat{n})A_n\hat{n} + \sum_{i=1}^{3} p(\bar{x},\hat{e}_i)A_i\hat{e}_i}_{\text{termini } O(\ell^2)} + \underbrace{\bar{h}(\bar{x})V + O(\ell^3)}_{\text{termini } O(\ell^3)} = \phi$$

Dalla trigonometria $A_i = A_n \hat{n}\cdot\hat{e}_i$ =>

$$\left[-p(\bar{x},\hat{n})\hat{n} + \sum_{i=1}^{3} p(\bar{x},\hat{e}_i)(\hat{n}\cdot\hat{e}_i)\hat{e}_i\right] A_n + \bar{h}(\bar{x})V + O(\ell^3) = \phi$$

Per annullare la somma, i termini in diverso ordine di ℓ si devono annullare separatamente =>

$$\bar{h}(\bar{x})V + O(\ell^3) = \phi$$

$$-p(\bar{x})\hat{n} + \sum_i p(\bar{x}, \hat{e}_i)(\hat{n}\cdot\hat{e}_i)\hat{e}_i = \phi$$

e riscrivendo $\hat{n} = \sum_{i=1}^{3} (\hat{n}\cdot\hat{e}_i)\,\hat{e}_i$ (somma vettoriale delle sue proiezioni sugli assi coordinati)

$$\sum_{i=1}^{3} \left[-p(\bar{x}, \hat{n})(\hat{n}\cdot\hat{e}_i) + p(\bar{x}, \hat{e}_i)(\hat{n}\cdot\hat{e}_i) \right] \hat{e}_i = \phi$$

ovvero per ogni componente i ,

$$\boxed{p(\bar{x}, \hat{n}) = p(\bar{x}, \hat{e}_i)}$$

dove $\hat{n}$ è arbitrario, data la scelta $\forall$ dei pt A, B, C che costruiscono il tetraedro.

Ne risulta l' ISOTROPIA DELLA PRESSIONE NEL FLUIDO IN EQUILIBRIO.

essa vale anche per fluido perfetto in moto, perché dalla definizione di fluido perfetto si deduce l'assenza di sforzi di taglio.

$\Rightarrow$ in questi casi $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$, ovvero

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} -p & \phi & \phi \\ \phi & -p & \phi \\ \phi & \phi & -p \end{pmatrix} = -p\underline{\underline{\mathbb{1}}}$$

Continuità di p all'interfaccia

Dati due fluidi in equilibrio, o due fluidi perfetti in moto, se questi sono immiscibili esiste una superficie di separazione (interfaccia); la pressione è continua attraverso tale superficie di separazione a patto di poter trascurare la tensione superficiale.

Una finestra colorata sulle bolle di sapone: la tensione superficiale

Per dettagli cfr. foglio a parte. In breve, la t.s. tra due sostanze/fasi è definita come lavoro per unità di area compiuto per aumentare l'area di contatto tra le due isotermicamente e reversibilmente.

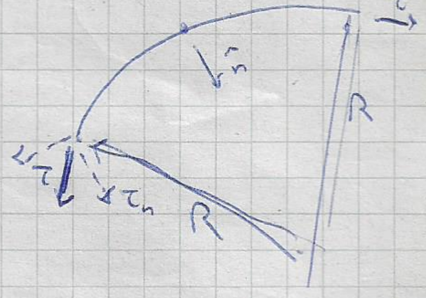
Dimensionalmente, se $[\text{Lavoro}] = [\tau][A]$

$$[\text{Forza}][L] = [\tau][L]^2$$

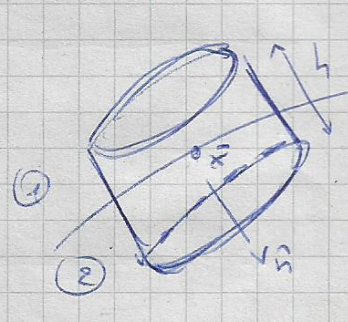
$$\Rightarrow [\tau] = [F]/[L]$$

forza per unità di lunghezza

τ agisce lungo la superficie di contatto. Se questa è curva, risulta una componente netta normale alla sup. stessa, e già intuitivamente è ovvio che questa τ_n è inversamente proporzionale al raggio di curvatura R (se la sup. piana $\tau_n = \emptyset$). $\Rightarrow \tau_n \propto \tau/R$ e dimensionalmente è $[F]/[L]^2$ cioè come una pressione.



Dimostrazione: si prenda un cilindretto a cavallo di una interfaccia, con diametro piccolo d e altezza h piccolo di ordine superiore, intorno al pt $\bar{x}$ sull'interfaccia.



L'equilibrio delle forze sul cilindretto deve dare risultante nulla.

Forze di volume: sono appunto $\propto$ vol $\sim d^2h \Rightarrow O(V)$ come ordine.

Ne è esempio la gravità che sarà $m\vec{g} \approx \rho d^2 h \vec{g}$

Forze di superficie sulle due basi: valutate in $\bar{x} \pm h/2$, l'errore su p è $O(h)$

e $\Rightarrow$ forza errore sulla $\approx p d^2 \sim O(h) O(d^2) \sim O(V) \Rightarrow$ l'errore confluisce nel termine $O(V)$

Aggiungiamo la tensione sup.; la comp. lungo $\hat{n}$ è una pressione $\sim \tau/R$

Dunque

$$\phi = p^{(1)}(\bar{x})\, d^2 \hat{n} - p^{(2)}(\bar{x})\, d^2 \hat{n} + \underbrace{O(d \cdot h)} \pm \frac{c\tau}{R} d^2 \hat{n} + \rho d^2 h \bar{g} + O(V)$$

termine di pressione sulla sup. laterale;

non è comunque diretto lungo $\hat{n}$

Termine di tensione superficiale; $\sim O(d^2)$

il segno dipende dal verso della curvatura (per come è fatto il disegno avremmo $\oplus$),

c coefficiente che qui lasciamo generico

Nelle somme si devono confrontare separatamente gli infinitesimi dello stesso ordine

$\Rightarrow$ gli $O(d^2)$ danno

$$p^{(1)}(\bar{x}) - p^{(2)}(\bar{x}) \pm c\tau/_R = \phi$$

e se τ trascurabile $\qquad p^{(1)}(\bar{x}) = p^{(2)}(\bar{x}) \qquad$ pressione continua all' interfaccia

Tensione superficiale

Def.: la <u>tensione superficiale</u> tra due sostanze o due fasi (di cui una può essere il vuoto) è il lavoro per unità di area compiuto per aumentare l'area di contatto tra le due <u>isotermicamente</u> e <u>reversibilmente</u>.

Dalla def. di energia libera (o potenziale) di Helmholtz: $F = U - TS$
e dal I principio della termodinamica si ha che il massimo lavoro estraibile da un sistema i cui costituenti sono tutti in contatto termico con un termostato è pari all'opposto della variazione di F:

$$dL^{max} = -dF$$

Perciò il lavoro fornito in condizioni isoterme e reversibilmente al sistema aumenta F, $dL = dF$ $\Rightarrow$ la tensione superficiale è data dall'en. libera per unità di sup. di contatto.

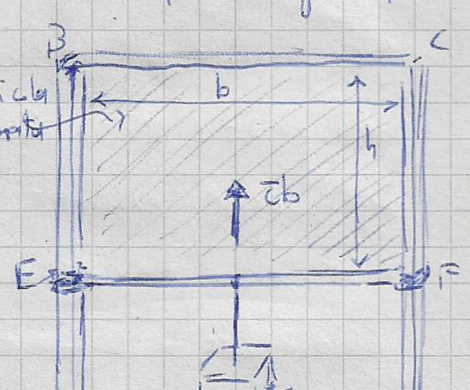
Perciò mantenendo inalterate le altre grandezze termodinamiche,

$dF = dL = \tau \, dA$ dove dA = variazione infinitesima dell' A di contatto
↳ (perciò dimensionalmente $[\tau] = [\text{Forza}]/[\text{Lunghezza}]$)

In secundis, lo stato di equilibrio del sistema isotermo termostatato minimizza F; se c'è anche la forza peso, equilibrio = min(F) e min(potenziale gravit.).

* SUPERFICIE PIANA (exp. del telaio)

Un esempio classico è il telaio con lato mobile, tre lati fissi AB, BC, CD e un lato mobile che si considera sottile e leggero, EF. Se immerso verticalmente in un liquido come acqua saponata, una volta estratto lo si trova con la superficie BCFE coperta da una pellicola di fluido e c'è una forza che tende a minimizzare la superficie stessa della pellicola (in realtà <u>due</u> superfici, le due facce opposte); da ciò si intuisce anche che effettivamente la pellicola deve essere piana.



La tensione tende a tirare verso l'alto il braccio mobile EF a meno che non la si equilibri con un peso tale che

$2\tau b = mg$ — F_t forza di tensione sup. ; mg forza peso — dove la F_t discende dal lavoro $dL = F_t dh$ che è anche $dL = 2\tau dA = 2\tau b dh$

(il 2 tiene conto delle <u>due</u> superfici)

Si osserva con questo esperimento che la forza della tensione sup. F_t è $\propto$ b lunghezza del lato mobile quindi la tensione è definita $\tau = F_t/2b$. Ma del resto da $F_t\, dh = dL$ lavoro compiuto per spostamento elementare dh e sapendo

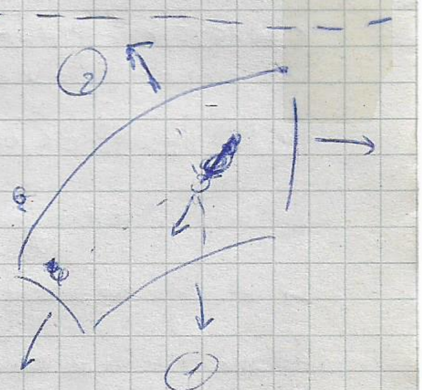
$dL = (2)\tau dA = (2)\tau b dh$ — (2): due superfici di contatto fluido-aria

$\Rightarrow \quad 2\tau b = F_t \quad \Rightarrow \quad \tau = F_t/2b$

NOTA: qui o nella bolla di sapone c'è il fattore 2 per le due superfici di contatto tra liquido e aria. Altrove nella def. il 2 non c'è in ragione di un'unica faccia, per es. una goccia di fluido o l'acqua nel bicchiere. Questi due ultimi esempi però introducono superfici curve, dove dobbiamo dire qualcos'altro.

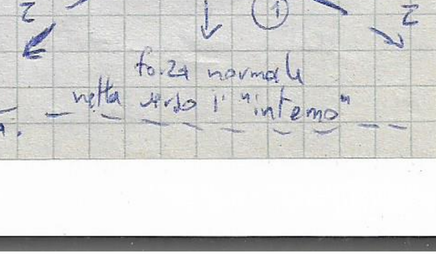
* SUPERFICIE CURVA

Se la sup. di contatto è curva, come intuibile dal disegno c'è una forza normale alla superficie e questa entra nel bilancio della pressione per la condizione di equilibrio. Se la tensione superficiale è trascurabile si dimostra la continuità della p all'interfaccia fra due fluidi all'equilibrio o perfetti.



Chiaramente la componente normale è $\propto 1/R$ raggio di curvatura, cioè dà un equivalente di pressione (Forza/superficie) $\sim \tau/R$ ($[\tau] = [F]/[L]$).

In 2D



Nota: in 3D ci sono <u>due</u> raggi di curvatura (raggi principali di curvatura), da cui $\Delta p = \text{cost.} \times \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ [cfr. Landau cap. 7] ma il concetto di nostro interesse (continuità di p all'interfaccia) non cambia.