Equazione di Eulero (un'anteprima sulla dinamica)

L'equazione di Eulero descrive la dinamica di un fluido perfetto (ovvero privo di sforzi di taglio e conduzione). Per scriverla riprendiamo i concetti introdotti a proposito delle leggi fisiche in forma integrale e locale; la prima eq. cardinale della dinamica per una porzione di fluido e'

$$\frac{D}{Dt}\int_R \rho \bar{v}\, d^3x = \bar{F}$$ forza complessiva risultante sul continuo in R, che e'

$$\bar{F} = \int_R \rho \bar{f}\, d^3x$$ con $\bar{f}$ forza per udM

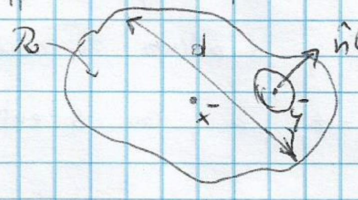
e poiche' ρ soddisfa l'eq. di continuita'

$$\frac{D}{Dt}\int_R \rho \bar{v}\, d^3x = \int_R \rho \frac{D\bar{v}}{Dt}\, d^3x = \int_R \rho \bar{f}\, d^3x$$ l'arbitrarieta' di R implica

$$\frac{D\bar{v}}{Dt} = \bar{f}$$

e per esplicitare veramente l'eq. dobbiamo determinare $\bar{f}$. Come gia' discusso, le forze significative in gioco sono le forze di superficie, o di contatto, applicate sulla superficie che delimita R, $\Rightarrow$

$$\bar{F} = \oint_{\partial R} -p(\bar{y})\, \hat{n}(\bar{y})\, da = \oint_{\partial R} -p(\bar{y})\, d\bar{a}$$



dove si integra su tutta la superficie la pressione del generico pt $\bar{y}$ della superficie, che e' opposta $(-p(\bar{y}))$ al versore locale $\hat{n}(\bar{y})$ dell'elemento di superficie da. Se facciamo tendere a zero il diametro d di R intorno al pt interno $\bar{x}$ abbiamo la $\bar{F}(\bar{x})$:

$$\bar{F}(\bar{x}) = \lim_{d\to 0}\left[-\oint_{\partial R} p(\bar{y})\, d\bar{a}\right] = \lim_{d\to 0}\left[-\int_R \operatorname{grad} p\, d^3x\right] = -\operatorname{grad} p\, V(R)$$

dal caso speciale del Teorema della divergenza (cfr. Appendice)

considerando che su volume piccolissimo le grandezze hanno valore uniforme

dove $V(R)$ e' il volume della regione R.

$$\Rightarrow \bar{F}(\bar{x}) = -\operatorname{grad} p(\bar{x})\, V(R) = \bar{f}(\bar{x}) \cdot M(R)$$ cioe' forza per udM $\times$ $M(R)$ massa del fluido contenuto in R

$$\Rightarrow \bar{f}(\bar{x}) = -\mathrm{grad}\, p \, \frac{V(R)}{M(R)} = -\frac{1}{\rho(\bar{x})} \mathrm{grad}\, p(\bar{x}) \qquad \text{da cui}$$

$$V(R)/M(R) = \sigma(\bar{x}) = 1/\rho(\bar{x})$$

$$\frac{D\bar{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \mathrm{grad}\, p \quad \text{ovvero}$$

$$\boxed{\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \mathrm{grad})\bar{v} = -\frac{1}{\rho} \mathrm{grad}\, p} \qquad \text{EQ. DI EULERO}$$

Se il fluido e' immerso in un campo gravitazionale esterno (per es. la Terra), alla forza $\bar{F}$ si aggiunge la gravità $M\bar{g}$, da cui la forza per udM totale e' $\bar{f} + \bar{g}$, $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \mathrm{grad})\bar{v} = -\frac{1}{\rho} \mathrm{grad}\, p + \bar{g}} \qquad \text{eq. di Eulero in campo gravitazionale}$$

Il fatto che il fluido sia perfetto e ciò implichi l'assenza di scambio termico conduttivo interno e con l'ambiente significa che il moto e' adiabatico in tutto il fluido. E poiché $dS = \delta Q / T$, in assenza di conduzione si deve avere

$$\frac{DS}{Dt} = \emptyset \quad \text{o, con } s \text{ entropia per udM,} \quad \boxed{\frac{Ds}{Dt} = \emptyset} \quad \text{condizione di moto adiabatico}$$

Sempre ricordando la relazione (vista nelle leggi integrali/locali) tra grandezza per udM g e grandezza per udV rispettiva ρg,

$$\rho \frac{Dg}{Dt} = \frac{\partial(\rho g)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho g \bar{v})$$

si può dire

$$\frac{Ds}{Dt} = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho s \bar{v}) = \emptyset}$$

che e' l'eq. di continuità per l'entropia, o più precisamente per ρs = entropia per udV (densità volumica di entropia), dove $\rho s \bar{v}$ = densità di flusso di entropia.

Si può semplificare l'eq. adiabatica se si ha entropia uniforme in tutto il fluido a un certo istante iniziale; poiché poi nel moto l'eq. adiabatica impone che s resti costante $\forall t$, la condizione di adiabaticità è ridotta a

$\boxed{s = costante}$ in tutto il fluido, detta cond. di FLUSSO ISOENTROPICO.

Ma dalla termodinamica, detta w entalpia per udM, si ha la relazione

$$dw = T ds + v dp \quad \text{e per } s = \text{costante} \rightarrow dw = v dp = \frac{1}{\rho} dp$$

e per definizione di gradiente $dw = \frac{1}{\rho} dp$ corrisponde a dire

$$\text{grad} w = \frac{1}{\rho} \text{grad} p$$

perciò per flusso isoentropico l'eq. di Eulero si può anche scrivere

$$\boxed{\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \text{grad}) \bar{v} = - \text{grad} w}$$

Ancora, da quest'ultima si può ricavare una forma ulteriore. Dati i vettori $\bar{a}$, $\bar{b}$,
si ha che $\text{grad}(\bar{a} \cdot \bar{b}) = (\bar{a} \cdot \text{grad}) \bar{b} + (\bar{b} \cdot \text{grad}) \bar{a} + \bar{a} \times \text{rot} \bar{b} + \bar{b} \times \text{rot} \bar{a}$;
se $\bar{a} = \bar{b} = \bar{v}$,

$$\text{grad}(v^2) = 2(\bar{v} \cdot \text{grad}) \bar{v} + 2 \bar{v} \times \text{rot} \bar{v} \Rightarrow \text{grad}\left(\frac{1}{2} v^2\right) = (\bar{v} \cdot \text{grad}) \bar{v} + \bar{v} \times \text{rot} \bar{v}$$

e sostituendo da questa espressione il termine $(\bar{v} \cdot \text{grad}) \bar{v}$ nell'eq. di Eulero isoentropica

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} - \bar{v} \times \text{rot} \bar{v} + \text{grad}\left(\frac{1}{2} v^2\right) = - \text{grad} w$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} - \bar{v} \times \text{rot} \bar{v} = - \text{grad}\left(\frac{1}{2} v^2 + w\right)$$ e applicando il rotore ad ambo i membri

$$\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot} \bar{v}) = \text{rot}(\bar{v} \times \text{rot} \bar{v})$$ [perché $\text{rot}(\text{grad}\, a) = \emptyset \ \forall a$]

Nota: per la soluzione del problema del moto, si devono determinare le quantità che descrivono lo stato, ovvero $(\bar{v}, p, \rho)$ (complessivamente 5 scalari) e servono dunque un pari numero di equazioni: eq. di Eulero

eq. di continuità

eq. adiabatica ($e \Rightarrow$ complessivamente 5 eq. scalari)

Appendice: Teorema della divergenza - casi particolari

Sotto opportune condizioni per la funzione vettoriale $\bar{F}(\bar{x})$, si dimostra il

teorema della divergenza:

$$\int_{S=\partial V} \bar{F} \cdot d\bar{a} = \int_V \operatorname{div} \bar{F} \, dV$$

di cui un caso di nostro interesse particolare è quello in cui

$\bar{F}(\bar{x}) = f(\bar{x})\,\bar{c}$ ovvero prodotto tra $f(\bar{x})$ scalare e $\bar{c}$ vettore costante non nullo

$$\Rightarrow \int_V \operatorname{div} \bar{F} \, dV = \int_V \operatorname{div}\left(f(\bar{x})\,\bar{c}\right) dV = \int \left[f(\bar{x}) \underbrace{\cancel{\operatorname{div} \bar{c}}}_{\phi \text{ perché } \bar{c} \text{ costante}} + \bar{c} \cdot \operatorname{grad} f(\bar{x}) \right] dV = \bar{c} \cdot \int_V \operatorname{grad} f(\bar{x}) \, dV$$

$$\text{Ma} \int_V \operatorname{div} \bar{F} \, dV = \int_{\partial V} \bar{F} \cdot d\bar{a} = \int_{\partial V} f(\bar{x})\,\bar{c} \cdot d\bar{a} = \bar{c} \cdot \int_{\partial V} f(\bar{x}) \, d\bar{a}$$

$\Rightarrow$ uguagliando i risultati delle due righe sopra $\bar{c} \cdot \left[\int_{\partial V} f(\bar{x}) \, d\bar{a} - \int_V \operatorname{grad} f(\bar{x}) \, dV \right] = \phi$

che deve valere $\forall \, \bar{c}$ costante $\neq \bar{\phi}$, $\Rightarrow$

$$\boxed{\int_{S=\partial V} f(\bar{x}) \, d\bar{a} = \int_V \operatorname{grad} f(\bar{x}) \, dV}$$

Similmente se $\bar{F}(\bar{x}) = \bar{c} \times \bar{P}(\bar{x})$ con $\bar{c}$ vettore costante non nullo

$$\int_V \operatorname{div} \bar{F} \, dV = \int_V \operatorname{div}\left(\bar{c} \times \bar{P}(x)\right) dV = \int_V \left[\bar{P}(\bar{x}) \cdot \underbrace{\cancel{\operatorname{rot} \bar{c}}}_{\phi \text{ per } \bar{c} \text{ costante}} - \bar{c} \cdot \operatorname{rot} \bar{P}(\bar{x}) \right] dV = -\bar{c} \cdot \int_V \operatorname{rot} \bar{P}(\bar{x}) \, dV$$

$$\text{Ma} \int_V \operatorname{div} \bar{F}(\bar{x}) \, dV = \int_{\partial V} \bar{F}(\bar{x}) \cdot d\bar{a} = \int_{\partial V} \left(\bar{c} \times \bar{P}(\bar{x})\right) \cdot \hat{n} \, da = \int_{\partial V} \left(\bar{P}(\bar{x}) \times \hat{n}\right) \cdot \bar{c} \, da = \bar{c} \cdot \int_{\partial V} \bar{P}(\bar{x}) \times \hat{n} \, da$$

$\Rightarrow$ come sopra, data l'arbitrarietà di $\bar{c}$ costante,

$$\boxed{\int_V \operatorname{rot} \bar{P}(\bar{x}) \, dV = -\int_{S=\partial V} \bar{P}(\bar{x}) \times d\bar{a}}$$