Ritorno alla fluidostatica

La statica richiede l'equilibrio delle forze, o equivalentemente nell'eq. di Eulero, che $D\vec{v}/Dt = \emptyset$, e perciò

$$-\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p + \vec{g} = \emptyset$$

CONDIZIONE DI EQUILIBRIO MECCANICO DEL FLUIDO

[In assenza di forze esterne, come $\vec{g}$, statica $\Leftrightarrow$ $\mathrm{grad}\,p = \emptyset$ e $\Rightarrow$ p uniforme ovunque.]

Le conseguenze sono molte e interessanti.

Dato un campo gravitazionale, si può definire un potenziale gravitazionale u rispetto al quale il campo è $-\mathrm{grad}\,u$; il caso semplice sulla Terra è $u = gz$, da cui $\vec{g} = -\mathrm{grad}\,u = -\mathrm{grad}(gz) = -g\hat{e}_z$ appunto.

Osserviamo perciò $-\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p = \mathrm{grad}\,u$

che ci dice che i gradienti di p e u sono lungo la stessa direzione, $\Rightarrow$

* le superfici isobare sono sup. equipotenziali del campo gravitazionale
* Applicando il rotore all'espressione

$$-\mathrm{grad}\,p = \rho\,\mathrm{grad}\,u$$ si ottiene

$$\mathrm{rot}(-\mathrm{grad}\,p) = \emptyset \qquad [\,\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,a) = \emptyset \quad \forall a\,]$$

$$\Rightarrow \emptyset = \mathrm{rot}(\rho\,\mathrm{grad}\,u) = \mathrm{grad}\,\rho \times \mathrm{grad}\,u + \rho\,\cancelto{\emptyset}{\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,u)} = \mathrm{grad}\,\rho \times \mathrm{grad}\,u$$

cioè anche ρ ha gradiente secondo u, p e le superfici di uguale densità (isopicniche) coincidono con isobare ed equipotenziali ($\vec{g}$). Lo stesso vale per tutte le altre grandezze termodinamiche, in quanto ricavabili da (p, ρ) [FLUIDO BAROTROPICO].

* Nel caso della gravità terrestre (forza peso, $\vec{g} = -g\hat{e}_z$) l'eq. di equilibrio dà sup. equipotenziali che sono piani orizzontali $\Rightarrow$ tutte le grandezze termodin. sono $f(z)$.

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{\rho(z)}\frac{dp(z)}{dz} = g$$

* Se le isobare sono equipotenziali, $\Rightarrow$ l'interfaccia tra fluidi immiscibili (es.: pelo libero di bacino d'acqua) è una superficie equipotenziale (cfr. esempio della centrifuga).
* $\vec{g} = g\hat{e}_z$ è un'approssimazione; inoltre in un sdr non inerziale (accelerato) va considerata la $\vec{g}$ osservata (include forze apparenti).

* Centrifuga

Una centrifuga schematizzata con un contenitore cilindrico che ruota con velocità angolare ω costante contiene un fluido (per es acqua) che ha una superficie di separazione con l'aria. In una condizione di equilibrio questa è una sup. equipotenziale. Mettendosi nel sistema di riferimento rotante, il potenziale è dato dalla somma di pot. gravitazionale e contributo centrifugo:

campo $\bar{g}' = \bar{g} + \omega^2 \bar{r} \quad \rightsquigarrow \quad u' = gz - \frac{1}{2}\omega^2 r^2$

$\bar{g}' = -\mathrm{grad}\, u'$

=> le sup. isobare → equipotenziali sono $u' =$ costante

ma $z = \frac{1}{2g}\omega^2 r^2 +$ costante è l'eq di un paraboloide di rotazione

cioè pelo libero in centrifuga → paraboloide

* Stella autogravitante

Una massa di fluido enorme è affetta dalla sua stessa gravità (autogravitazione), come una stella la cui coesione è data proprio dalla sua grande massa. Chiaramente ρ non è uniforme qui.

Il potenziale gravitazionale Newtoniano u rispetta l'eq di Poisson

$$\nabla^2 u = 4\pi G\rho$$

(come ϕ pot. elettrostatico: sono forze centrali di tipo $\sim 1/r^2$)

dove $\nabla^2 u = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\, u)$.

La condizione di equilibrio meccanico (idrostatico) (non si suppone necessariamente equilibrio termico), già vista, è l'equazione di bilancio nullo di forze $-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\, p = \mathrm{grad}\, u$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{div}\left(\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\, p\right) = -4\pi G\rho$$

che in caso di assenza di rotazione e => simmetria sferica dà

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dp}{dr}\right) = -4\pi G\rho$$

(tutto in limite non relativistico)

[vedasi anche l'appendice "Eddington solar model"]

Equilibrio dell'atmosfera - stabilità dell'equilibrio

Per grandi masse di fluido, come un'atmosfera planetaria, la condizione di equilibrio meccanico $\text{grad}\, p = \rho \vec{g}$

non è immediatamente integrabile perché ρ non è uniforme. Si possono fare diverse approssimazioni e ipotesi aggiuntive (più o meno crude).

* Equilibrio meccanico + termico (atmosfera isoterma) (secca)

Ipotizziamo che, oltre all'equ. meccanico, che il rimescolamento porti a T uniforme.

$\Rightarrow$ per il pot. di Gibbs per udM $\phi = G/M$ si ha

$$d\phi = -s\,dT + v\,dp \quad \text{ma } T = \text{cost.} \quad \Rightarrow \quad d\phi = v\,dp = \frac{1}{\rho}dp$$

il che, data la definizione di gradiente, è equivalente a

$$\frac{1}{\rho}\text{grad}\,p = \text{grad}\,\phi \quad \Rightarrow \quad \text{grad}\,\phi = \vec{g} \qquad \text{con } \vec{g} = -\text{grad}(gz) \text{ se } \vec{g} = -g\hat{e}_z$$

$$\Rightarrow \text{grad}(\phi + gz) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\phi + gz = \text{costante}}$$

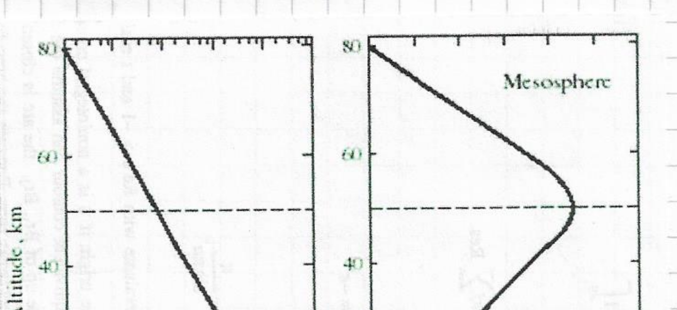
in tutto il fluido la somma di energia libera di Gibbs e pot. gravitazionale è uniforme (condizione di equilibrio termodinamico in campo esterno)

Altezza di scala dell'atmosfera terrestre

Conseguenza dell'ipotesi di isotermia, che è in qualche modo accettabile sapendo che per i primi 70 Km $T = \tilde{T} \simeq 250K$ con una variazione massima del 15%, è che si può stimare l'andamento della pressione atmosferica in funzione dell'altezza.

Combiniamo dunque la condizione di equ. meccanico $\text{grad}\,p = \rho\vec{g}$ nella forma

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$



con l'equ. di stato dei gas perfetti (e quindi ulteriore ipotesi) $pV = NR\tilde{T}$ (con $T = \tilde{T}$ temp. media)

se $\rho = \frac{1}{v} = \frac{M}{V}$ $\quad pV = p\frac{M}{\rho} = NR\tilde{T}$

e con $M_{mol} \doteq M/N$ massa molare $\quad \frac{p}{\rho} = R\tilde{T}/M_{mol}$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dz} = -g\frac{M_{mol}}{R\tilde{T}}p$$

Definiamo $H \doteq R\tilde{T}/gM_{mol}$ altezza di scala

Source: "Introduction to Atmospheric Chemistry" Daniel J. Jacob, Princeton University Press, 1999

$$\Rightarrow \quad \frac{dp}{dz} = -\frac{1}{H} p \quad \Rightarrow \quad p(z) = p_0 e^{-z/H} \quad \text{con } p_0 = p(z=0) \text{ pressione al suolo}$$

e vediamo che la pressione decresce esponenzialmente con una cosiddetta altezza di scala H, ovvero una lunghezza tipica dello "spessore" dell'atmosfera.

Dati $R = 8.31 \ J/mol \cdot K$

$\tilde{T} = 250 K$

M_{mol} (aria) $= 28.96 \cdot 10^{-3} \ kg/mol$

$g = 9.81 \ m/s^2$

otteniamo $\underline{H = 7.3 \ Km}$ che è un valore piuttosto approssimativo, ma è nell'ordine di grandezza (cfr. grafico da D. J. Jacob).

* Atmosfera isoentropica (secca)

Facciamo ipotesi meno stringenti dell'isoterma:

moto adiabatico e idealmente lento, ovvero reversibile e isoentropico, di un elemento di fluido atmosferico in equ. meccanico che si sposti verticalmente; lo si giustifica perché la conduzione termica dei gas è molto bassa (il trasporto del calore è fondamentalmente di tipo convettivo);

nello spostamento verticale, la mosterella assume l'entropia del gas alla nuova quota, il che si giustifica col continuo rimescolamento verticale che avviene in troposfera. Ciò significa che si assume entropia specifica dell'atmosfera uniforme, in conclusione.

Ora possiamo dire per l'entalpia specifica $w = H/M$ (entalpia per udM)

$$dw = T\underbrace{ds}_{ds=\phi} + v\,dp = \frac{1}{\rho}dp$$ e $\Rightarrow$ per definizione di gradiente

$$\text{grad}\, w = \frac{1}{\rho}\text{grad}\, p$$ $\Rightarrow$ la condizione di equilibrio meccanico diventa

$$\text{grad}\, w = \bar{g} = -\text{grad}\,(gz) \Rightarrow \text{grad}\,(w + gz) = \phi$$

$$\Rightarrow \boxed{w(z) + gz = \text{costante} = w_0} \quad (w_0 = w(z=\phi) \text{ valore al suolo})$$

è costante la somma di entalpia specifica e pot. gravitazionale

Nell'approssimazione di gas perfetto sappiamo (cfr. Memorie della Termodinamica) che

$dw = c_p T$ con c_p calore specifico per udM a p costante

e perciò $w = c_p T$ (se c_p costante, altrimenti $w = \int c_p(T)\,dT$)

$$\Rightarrow c_p T(z) + gz = c_p T_0 \quad \text{con } T_0 = T(z=\phi)$$

$$\Rightarrow \boxed{T(z) = T_0 - \frac{g}{c_p} z}$$ andamento di T in altezza

Dall'equ. della trasformazione adiabatica (coerente con le ipotesi di cui sopra) si possono ottenere anche gli andamenti di $p(z)$, $\rho(z)$:

- $T p^{\frac{1}{\gamma}-1} = \text{cost.}$ $\quad \frac{1}{\gamma} - 1 = \frac{C_v}{C_p} - 1 = \frac{C_v - C_p}{C_p} = -\frac{R}{C_p}$ ⇐ ATTENZIONE: qui C_p, C_v calori molari, non c_p, c_v

$$\Rightarrow T/p^{R/C_p} = \text{cost.} = T_0/p_0^{R/C_p}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{p(z)}{p_0} = \left(\frac{T(z)}{T_0}\right)^{c_p/R}}$$

- $TV^{\gamma-1} = \text{costante} \qquad \gamma - 1 = \frac{c_p}{c_v} - 1 = \frac{c_p - c_v}{c_v} = \frac{R}{c_v}$

$$\frac{T}{\rho^{\gamma-1}} = \frac{T}{\rho^{R/c_v}} = \text{costante} = \frac{T_0}{\rho_0^{R/c_v}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{p(z)}{p_0} = \left(\frac{T(z)}{T_0}\right)^{c_v/R}}$$

Possiamo riscrivere la condizione di equ. meccanico per atmosfera isoentropica secca in modo leggermente diverso. Avendo $T(z) = T_0 - g/c_p \, z$,

$$\boxed{\frac{dT}{dz} = -g/c_p}$$ che è $\simeq 10^{-2}\,K \cdot m^{-1}$ dato $c_p = 1005\ J/kg \cdot K$ a 1 atm per l'aria secca

Note: a) questo è un valore di equilibrio ma ci si deve chiedere quando sia equ. stabile;

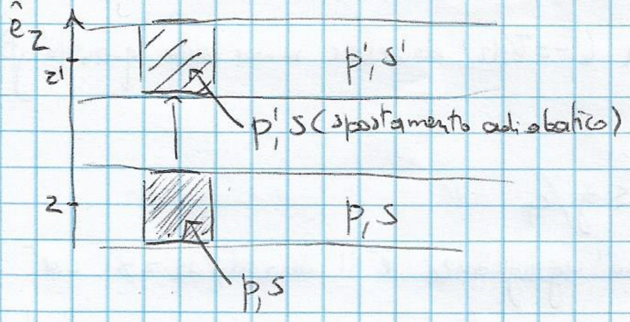
b) l'aria è carica, in modo variabile da zona a zona, di umidità (vapore acqueo), e se una porzione di aria umida sale si raffredda $\Rightarrow$ l'acqua condensa e rilascia il calore latente di evaporazione; si conti poi che per l'aria umida $c_p \simeq 2030\ J/kg \cdot K$, doppio dell'aria secca; il risultato è che il gradiente verticale di temperatura, in una zona temperata, ha valori inferiori ($\sim 5 \cdot 10^{-3}\ K \cdot m^{-1}$) al valore sopra stimato, che può valere semmai per aree estremamente secche come... l'Antartide!

Stabilità

Poiché l'equilibrio meccanico non implica quello termico, si pone il problema della stabilità dell'equilibrio: se è instabile si instaurano correnti (CONVEZIONE) che rimescolano il fluido per uniformare T. Condizione di stabilità per l'equ. meccanico, in altre parole, è l'assenza di convezione, che ricaviamo ora.

Supponiamo che un elemento di fluido di volume specifico v si trovi ad una quota verticale z; esso sarà caratterizzato da determinati valori delle grandezze termodinamiche, ovvero $v = v(p(z), s(z))$.

Se l'elemento è spostato adiabaticamente in verticale, si porta da $v(p,s)$ a $v(p',s)$ (moto adiabatico $\Rightarrow s$ costante) e si trova in regione con (p',s') (cfr. disegno ←).



Condizione necessaria per la stabilità dell'equilibrio è che se l'elemento sale, la sua densità sia maggiore dell'ambiente ($\Rightarrow$ torna giù) e viceversa se scende si ritrovi meno denso del fluido circostante ($\Rightarrow$ tende a risalire), ovvero per spostamento dz

$$dz > \phi \Rightarrow \rho_{ext}(p',s') \leq \rho_{elemento}(p',s) \quad \text{ovvero} \quad v_{ext}(p',s') \geq v_{el}(p',s)$$

$$dz < \phi \Rightarrow \rho_{ext}(p',s') \geq \rho_{elemento}(p',s) \quad \text{ovvero} \quad v_{ext}(p',s') \leq v_{el}(p',s)$$

$\Rightarrow$ se consideriamo lo spostamento ennesimo dz possiamo sviluppare

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_{p=\text{cost.}} \frac{ds}{dz} dz \quad \text{e la stabilità impone} \quad \boxed{\frac{dv}{dz} \doteq \left(\frac{\partial v(p,s)}{\partial s}\right)_{p=\text{cost.}} \frac{ds}{dz} \geq \phi}$$

Scrivendo $\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_p = \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p = \frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$ si ottiene

$$\frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \frac{ds}{dz} \geq \phi$$ ma T/c_p positivo e tipicamente le sostanze, se riscaldate, sono soggette a espansione termica $\Rightarrow$ anche $\partial v/\partial T \geq \phi$

$\Rightarrow$ la richiesta per la stabilità si riduce a $\frac{ds}{dz} \geq \phi$

$$\Rightarrow \frac{ds}{dz} = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \frac{dT}{dz} + \underbrace{\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T}_{\text{IV relazione di Maxwell}} \frac{dp}{dz} = \frac{c_p}{T}\frac{dT}{dz} - \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \frac{dp}{dz} \geq \phi$$

Valendo sempre l'equilibrio meccanico, $\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{1}{v} g$

$$\Rightarrow \frac{c_p}{T}\frac{dT}{dz} + \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \frac{g}{v} \geq \phi$$ e con $\beta \doteq \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$ coefficiente di espansione termica

$$\boxed{-\frac{dT}{dz} \leq \frac{g\beta T}{c_p}}$$

CONDIZIONE DI ASSENZA DI CONVEZIONE = DI EQUILIBRIO STABILE

la velocità di diminuzione di T con la quota verticale ($-dT/dz$) dev'essere minore della quantità $g\beta T/c_p$.

Note

* per un gas perfetto $\beta = 1/T \Rightarrow -dT/dz \leq g/c_p$

* il caso in cui la disuguaglianza diventa un'uguaglianza è il caso $ds/dz = \emptyset$ cioè s uniforme, ovvero il caso di atmosfera isoentropica che abbiamo trattato immediatamente prima, trovando proprio (con $\beta = 1/T$) $-dT/dz = g/c_p$.

APPENDIX: Eddington solar model (1926)

This model describes the Sun (or in general a star) using a number of simple (sometimes crude) assumptions, yet getting fairly close in the determination of some of the quantities of interest.

If we consider the star as a sphere of ionized gas, which self-gravitates due to the huge amount of matter, hydrostatic equilibrium (non-rotating star)

$$-\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p = \mathrm{grad}\,u \qquad (\leftarrow \text{barotropic fluid})$$

where u is the Newtonian gravitational potential, which obeys a Poisson eq. $\sim 1/r^2$

$$\nabla^2 u = 4\pi G\rho$$

and since $\nabla^2 u = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\,u)$ we apply the divergence to the hydrostatic equilibrium equation, reduced to a spherically-symmetric equation

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dp}{dr}\right) = -4\pi G\rho$$

A relationship between p and ρ is needed. This may be complicated as it is related to energy transport in the star, which requires knowledge of fusion reactions generating energy and the transport mechanisms, i.e. convection and radiation, inside the star (which depend on complicated matters like to transparency/opacity of the star to radiation) up to its surface. Here comes Eddington's hypothesis: Internal energy transport is dominated by the radiation mechanism.

Then, we must consider that pressure is made of two contributions:

$$p = p_g + p_r$$

with p_g the gas pressure and p_r the radiation pressure. For p_g we have the ideal gas law

$$p_g V = NRT = \underset{\substack{\uparrow\\ \#\text{moles}}}{N}\,\underset{\substack{\uparrow\\ \#\text{particles/mole}}}{N_A}\,k_B T = \frac{M}{\langle m\rangle}k_B T$$

moles · # particles/mole = # particles = total mass/avg mass

and we call

$$\langle m\rangle = \mu m_p \qquad (\mu = \text{relative molecular mass, } \langle m\rangle/m_p,\ m_p \to \text{proton mass})$$

So

$$p_g = \rho k_B T/\mu m_p$$

For the radiation pressure, upon local thermodynamic equilibrium of radiation with the star's matter,

$$p_r = \frac{1}{3}\alpha T^4$$

and the two contributions are weighed with the parameter β:

$$\begin{cases} p_g = (1-\beta)p \\ p_r = \beta p \end{cases}$$

(Note: β is assumed to uniform... but it turns out to be quite ok.)

Let us put together the eqs. for p_g, p_r and the β - $1-\beta$ ratios:

$$p_r = \frac{1}{3}\alpha T^4 \rightarrow \quad T^4 = \frac{3}{\alpha}p_r = \frac{3}{\alpha}\beta p \longrightarrow =$$

$$p_g = \rho k_B T/\mu m_p \rightarrow \quad T = \frac{\mu m_p}{\rho k_B}p_g \rightarrow \quad T^4 = \left(\frac{\mu m_p}{\rho k_B}\right)^4 p_g^4 = \left(\frac{\mu m_p}{\rho k_B}\right)^4 (1-\beta)^4 p^4$$

$$\Rightarrow p^3 = \left(\frac{k_B}{\mu m_p}\right)^4 \frac{3}{\alpha}\frac{\beta}{(1-\beta)^4}\rho^4 \Rightarrow \quad \boxed{p = K\rho^{4/3}} \quad \text{with } K \doteq \left[\frac{3}{\alpha}\left(\frac{k_B}{\mu m_p}\right)^4 \frac{\beta}{(1-\beta)^4}\right]^{\frac{1}{3}}$$

This equation of state has the form of a <u>polytrope</u>, a power law p-ρ generally expressed as $p = K\rho^\gamma = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$ (hence $\rho \propto T^n$)

Note that the adiabatic process is a special polytrope, where γ is the ratio of specific (constant p / constant V) heats and for a fully ionized (monoatomic) hydrogen plasma we would expect $\gamma = 5/3$ ($n = 1.5$) while here $\gamma = 4/3$ ($n = 3$) which accounts for the radiation process and pressure. In general a 'polytropic star' is a star where the barotropic equation of state p-ρ is in the form $p = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$.

We can reduce the problem to a dimensionless equivalent using the values $T_c = T(r=\emptyset)$, $p_c = p(r=\emptyset)$, $\rho_c = \rho(r=\emptyset)$ and defining $\vartheta \doteq T/T_c$ dimensionless temperature.

Hence $\quad p_g = p(1-\beta) = K\rho^{4/3}(1-\beta) = \rho k_B T/\mu m_p \Rightarrow$

$$\rho^{\frac{1}{3}} = k_B T / \mu m_p K \quad \Rightarrow \quad \underline{\frac{\rho}{\rho_c} = \left(\frac{T}{T_c}\right)^3 = \vartheta^3} \; ; \; \underline{\frac{p}{p_c} = \left(\frac{\rho}{\rho_c}\right)^{4/3} = \vartheta^4}$$

Notice that $\vartheta(\phi) = 1$; $\vartheta(R) = \phi$

where we call R = star radius, and $T, p, \rho = \phi$ at $r = R$ where there is no longer any matter.

A further boundary condition: since in $r = \phi$ mass is null and so is gravitational force

$$\left.\frac{dp}{dr}\right|_{r=\phi} = \phi \Rightarrow \frac{dp}{dr} \propto \frac{d\vartheta^4}{dr} \propto \vartheta^3 \frac{d\vartheta}{dr} = \phi \Leftrightarrow \boxed{\left.\frac{d\vartheta}{dr}\right|_{r=\phi} = \phi} \quad (\text{since } \vartheta(\phi) = 1).$$

With the dimensionless radial coordinate

$\xi \doteq r/a$ (with a a scale length suitably defined later)

the hydrostatic equilibrium equation can be reworked:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dp}{dr}\right) = -4\pi G\rho \quad \Leftarrow \quad r = a\xi$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2\xi^2}\frac{1}{a}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{a^2\xi^2}{\rho}\frac{1}{a}\frac{dp}{d\xi}\right) = -4\pi G\rho$$

$$\frac{1}{a^2\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\xi^2}{\rho}\frac{dp}{d\xi}\right) = -4\pi G\rho \quad \Leftarrow \quad p/p_c = \vartheta^4 \; ; \; \rho/\rho_c = \vartheta^3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\xi^2}{\rho_c\vartheta^3}p_c\frac{d\vartheta^4}{d\xi}\right) = \frac{p_c}{\rho_c}\frac{1}{a^2\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\xi^2}{\vartheta^3}4\vartheta^3\frac{d\vartheta}{d\xi}\right) = -4\pi G\rho_c\vartheta^3$$

$$\Rightarrow \frac{p_c}{\pi G\rho_c^2}\frac{1}{a^2}\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\vartheta}{d\xi}\right) = -\vartheta^3$$

$p_c = K\rho_c^{4/3}$

$$\frac{K}{\pi G\rho_c^{2/3}a^2}\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\vartheta}{d\xi}\right) = -\vartheta^3$$

and we can choose $a \doteq \left[K/\pi G\rho_c^{2/3}\right]^{\frac{1}{2}}$ so that the factor in front becomes 1.

The final form of the equation is

$$\boxed{\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\vartheta}{d\xi}\right) = -\vartheta^3} \quad \text{Lane-Emden equation}$$

or better, the Lane-Emden equation of polytropic index $n=3$. If we had a generic polytropic eq. of state $p = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$ we would find the same form with n instead of 3. This eq. must be integrated to find $\vartheta(\xi)$, i.e. $T(r)$ and so $p(r)$, $\rho(r)$.

Unfortunately, analytical solutions to the LE eq. exist only for $n = 0, 1, 5$. It is worth spending a few words on these and other notable cases (including our case, $n=3$).

* $\underline{\underline{n=0}}$ — Straightforward integration yields (together with the aforementioned b.c.)

$$\vartheta(\xi) = 1 - \xi^2/6 \qquad \text{and} \qquad \xi_1 = \sqrt{6} \simeq 2.449$$

Physically, $n=0$ means $\rho = \rho_c$, INCOMPRESSIBLE star (and $p = p_c \vartheta$). That is hardly a model for a star, but it can account for a terrestrial planet (a planet, like the Earth that is mostly made out of rocky and metallic material, as opposed to gaseous planets like Jupiter and Saturn).

* $n=1$ — A smart mathematician will find

$$\vartheta(\xi) = \sin\xi/\xi \qquad \text{and} \qquad \xi_1 = \pi$$

Curiously, integrating the mass eq. $\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho$ in this case yields (with some algebra) $R = (\pi K/2G)^{1/2}$, i.e. the star radius does not depend on its mass M_*. As a note, it turns out that polytropes with $0.5 < n < 1$ can be used to model neutron stars.

* $n=5$ — A very smart mathematician will find

$$\vartheta(\xi) = 1/(1+\xi^2/3)^{1/2} \qquad \text{and} \qquad \xi_1 \to \infty \text{ (yet total mass is still finite)}$$

* $n>5$ - $n=\infty$ — $\forall\, n \geq 5$ the star has infinite radius. For $n \to \infty$ $\underline{p = K\rho}$, which is the <u>isothermal</u> case. At large radii $\rho \sim 1/r^2$ and both radius and mass of the star are infinite. Physically, in order to have an isothermal sphere of finite radius, the sphere must be embedded in an external medium supplying a pressure such that an equilibrium can be reached. This can model the gas core of big structures such as molecular clouds.

* $n=1.5$ — No analytic solution but notice that it says $p = K\rho^{5/3}$, i.e. here we have a <u>fully convective star</u>, where heat transport is basically accomplished by a fast motion and mixing of fluid elements, in an adiabatic fashion (thus the adiabatic exponent $\gamma = 5/3$ for monoatomic gases). That can be considered true for low-mass stars, $M_* < 0.3 M_\odot$. Note: $R M_*^{1/3} \propto K/G$, i.e. a smaller star is more massive! $\xi = 3.654$. (e.g. nonrelativistic white dwarfs)

* $n=3$ – Finally, we get back to the Eddington model. Again, no exact solution. $\xi_1 = 6.897$. Let us also consider the mass equation

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

(by numerical integration of LE → ϑ → ...)

and define $y(\xi) \doteq -\xi^2 \, d\vartheta/d\xi$ (that is a monotonically increasing function of the radial coordinate ξ, with $y_1 \doteq y(\xi_1) \simeq 2.018$). In dimensionless units

$$\frac{1}{\alpha}\frac{dm}{d\xi} = 4\pi \alpha^3 \xi^2 \rho_c \vartheta^3 = 4\pi \alpha^3 \xi^2 \rho_c \frac{1}{\xi^2}\frac{dy}{d\xi}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dm}{d\xi} = 4\pi \alpha^3 \rho_c \frac{dy}{d\xi} \quad \text{and} \quad m(\xi) = 4\pi \alpha^3 \rho_c y$$ (constant of integration $= \emptyset$ since $m(\emptyset) = \emptyset$)

$\Rightarrow$ finally the star mass is $M_* = m(\xi_1) = m(R) = 4\pi \rho_c \alpha^3 y_1$

and using the definitions of $\alpha \doteq \left(K/\pi G \rho_c^{2/3}\right)^{1/2}$ and $K_L \doteq \left[\frac{3}{a}\left(\frac{k_B}{\mu m_p}\right)^4 \frac{\beta}{(1-\beta)^4}\right]^{1/3}$

$$M_* = 4\pi \left(K/\pi G\right)^{3/2} y_1 = 4\pi \left[\frac{1}{(\pi G)^3}\, \frac{3}{a}\, \frac{\beta}{(1-\beta)^4}\right]^{1/2} \frac{1}{\mu^2}\, y_1 \; ;$$

now we define a reference mass value

$$M_0 \doteq \left[\frac{1}{(\pi G)^3}\left(\frac{k_B}{m_p}\right)^4 \frac{3}{a}\right]^{1/2} 4\pi y_1 = 3.586 \cdot 10^{31}\ \mathrm{kg}$$

and $\zeta \doteq \mu^2 M_*/M_0$

so that $\zeta^2 = \beta/(1-\beta)^4$

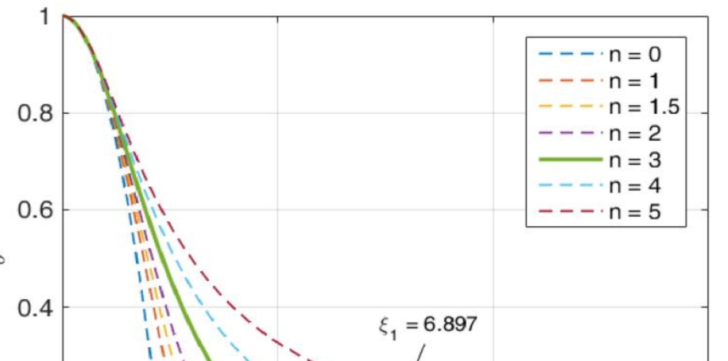
These results bring us to a few considerations.

⊙ $M_* = 4\pi (K/\pi G)^{3/2} y_1 = \left(\frac{K_L}{0.364\,G}\right)^{3/2}$ indicates that the star mass does not depend on the radius of the star itself (compare to $n=1$ where instead K did set a radius R, but not the mass M_*, and to a general case where we get a relation between R and M_* through K)!

⊙ The ratio between radiation and gas pressure, $\beta/(1-\beta)$, increases strongly with ζ and thus with both the star mass M_* and the mean molecular weight μ. With the observed solar $M_\odot = 1.989 \cdot 10^{30}$ kg and $\mu = 0.68$ (the latter being obtained in the context of the more advanced Standard Solar Model (SSM), => $\zeta = 0.0256 \ll 1$ and inverting the ζ-β relation, $\beta \simeq \zeta^2 - \frac{1}{4}\zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^6) = 6.577 \cdot 10^{-4}$. This says that p_r is a small contribution to $p = p_g + p_r$, and that radiative transport of energy is by far less effective than convection, where the latter occurs. But it turns out that in a star like the Sun, convection takes place only in the outermost region, accounting for a minor fraction of its bulk.

⊙ Despite its simple assumptions, Eddington's model yields a fairly accurate description of the thermodynamic quantities. Compared to the SSM, it gets values correct within a factor two:

Eddington (with observed values $M_\odot$ and $R = 6.860 \cdot 10^8$ m)	SSM
$T_c = \frac{\xi_1}{4y_1}\,\mu(1-\beta)\,\frac{GM_\odot m_p}{R\,k_b} = 1.34 \cdot 10^7$ K	$1.58 \cdot 10^7$ K
$\rho_c = \frac{\xi_1^3}{4\pi y_1}\,\frac{M_\odot}{R^3} = 7.63 \cdot 10^4$ Kg/m^3	$15.6 \cdot 10^4$ Kg/m^3
$p_c = \frac{\xi_1^4}{16\pi y_1^2}\,\frac{GM_\odot^2}{R^4} = 1.24 \cdot 10^{16}$ N/m^2	$2.38 \cdot 10^{16}$ N/m^2



Further info: ⊙ R. Fitzpatrick, 'Fluid Mechanics', available online at https://farside.ph.utexas.edu, under 'Teaching'

⊙ C.J. Clarke and R.F. Carswell, 'Principles of Astrophysical Fluid Dynamics', Cambridge University Press