Idrostatica di fluidi incomprimibili

Per un fluido incomprimibile (ρ = costante) la condizione idrostatica

$$-\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p + \bar{g} = \phi \qquad \text{con } \bar{g} = -g\hat{e}_z$$

è facilmente integrabile:

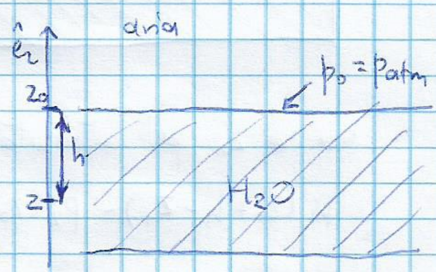
$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = \phi \;, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad \Rightarrow \quad \boxed{p(z) = -\rho g z + \text{costante}}$$

o $\boxed{p(z) + \rho g z = \text{costante}}$ LEGGE DI STEVINO

Equivalentemente, detta z_0 quota verticale di riferimento per la quale è nota p_0 (per es. pelo libero del fluido, per il quale $p_0 = p_{atm}$)

$p(z) - p(z_0) = \rho g (z_0 - z)$ oppure

$p(z) - p(z_0) = \rho g h$ avendo definito $h \doteq z_0 - z$



Es. (cfr. figura a destra): scendendo sott'acqua la pressione aumenta; per un incremento di $1\,atm \simeq 10^5\,Pa$,
$10^5 = \rho_{H_2O} \cdot g \cdot h \simeq 10^3 \cdot 10 \cdot h \Rightarrow h = 10\,m$. Ogni 10 m di profondità p aumenta ~ 1 atm, da cui è necessaria una certa cautela per assicurare la corretta fisiologia umana...

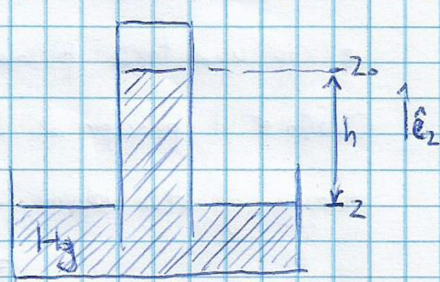
Vediamo qualche semplice applicazione.

Barometro di Torricelli

È il primo strumento concepito per la misurazione della pressione atmosferica. Un lungo tubo chiuso a un'estremità è riempito di mercurio (liquido ad alta densità) e rovesciato in un bacino più ampio senza far uscire Hg. Nel bacino viene versato altro Hg e il tubo viene sollevato. Ne fuoriesce una parte del liquido, lasciando del vuoto in alto, a quota z_0, per cui $p(z_0) = \phi$. Detto z il livello raggiunto dal Hg nel bacino,

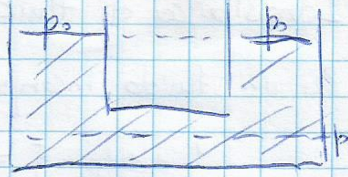
$$p(z) - \underbrace{p(z_0)}_{\phi} = \rho g (z_0 - z) = \rho g h$$

$$\Rightarrow \boxed{p_{atm} = p(z) = \rho g h}$$



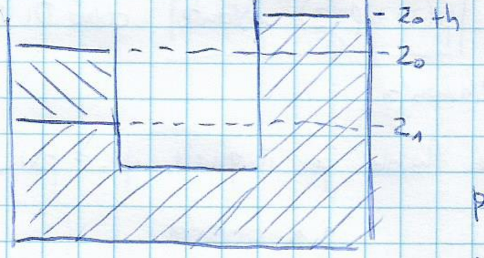
Si osserva che $h \simeq 0{,}76\,m$, dato $\rho_{Hg} = 13.6 \cdot 10^3\,Kg/m^3$, $p_{atm} \simeq 1.013 \cdot 10^5\,Pa$

Vasi comunicanti - fluidi immiscibili



Presi due vasi comunicanti e riempiti con un fluido, la superficie isobara ed equipotenziale del pelo libero è la stessa.

Se ora in una delle due aperture aggiungiamo un secondo fluido che non si mescola col primo (e lo facciamo con tale ideale cautela da non provocare agitazione) e con densità $\rho_2 \neq \rho_1$ densità del primo, i livelli nei due vasi non sono più gli stessi. Sui due peli liberi la



pressione è sempre quella atmosferica. Con riferimento al disegno, possiamo dire

per colonna dx $p^{(1)}(z_1) - p_{atm} = \rho_1 g (z_0+h - z_1)$

per colonna sx $p^{(2)}(z_1) - p_{atm} = \rho_2 g (z_0 - z_1)$

ma a z_1 per continuità $p^{(1)}(z_1) = p^{(2)}(z_1) \Rightarrow$

$$\rho_1 (z_0 + h - z_1) = \rho_2 (z_0 - z_1)$$

$$\Rightarrow h = \frac{\rho_2}{\rho_1}(z_0 - z_1) - (z_0 - z_1) \Rightarrow h = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right)(z_0 - z_1)$$

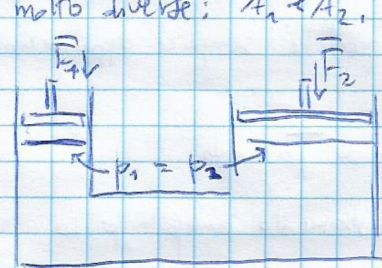
$h > \emptyset$ se $\rho_2 > \rho_1$ (come disegno)

$h < \emptyset$ se $\rho_2 < \rho_1$

Pressa idraulica

Prendiamo due vasi comunicanti di sezioni molto diverse: $A_1 < A_2$.

Riempiendo di fluido, all'equilibrio sul pelo libero $p_1 = p_2$ e perciò se si agisce con due forze F_1, F_2 sui due vasi



$$p_1 = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} = p_2 \Rightarrow F_1 = \frac{A_1}{A_2} F_2$$

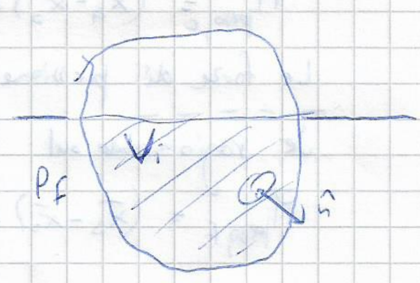
e con una forza piccola sul vaso 1 è possibile equilibrare una grande forza su 2. Questo è il principio dei sollevatori idraulici. Naturalmente per un uno spostamento si muovono gli stessi volumi di fluido: $\Delta V_1 = \Delta V_2$

$\Rightarrow$ $h_1 A_1 = h_2 A_2$ e con $A_1 < A_2$ il sollevamento h_2 è piccolo (si applica una piccola forza, per lungo tempo però).

Forza di Archimede

Qual è la forza che un fluido in quiete esercita sulla parte immersa di un corpo?
[L'espressione vale solo per il caso statico: gli sforzi sono ≠ nel caso dinamico!]

Su ogni elemento di superficie immersa c'è pressione del fluido, ovvero una forza $-p(\bar{x})\,\hat{n}\,da$ se l'elemento di superficie è nel pt $\bar{x}$, ha normale $\hat{n}$ e area da; la risultante forza $\bar{F}_A$ sarà



$$\bar{F}_A = -\int_S p(\bar{x})\,\hat{n}(\bar{x})\,da$$

Invece del calcolo esplicito, che richiede la conoscenza della geometria, si può osservare che la $\bar{F}_A$ è la stessa che si eserciterebbe sulla superficie se al posto del volume immerso V_i del corpo ci fosse lo stesso fluido, sempre in quiete; infatti nel caso statico gli elementi di fluido si scambiano puramente pressione. Questo è il fluido "spostato" della legge di Archimede; infatti per la statica la somma delle forze sul fluido "spostato", ovvero la somma di $\bar{F}_A$ e della $\bar{F}$ di gravità, deve essere nulla:

$$\bar{F}_A + m_f\,\bar{g} = \phi \qquad \text{con } m_f = \rho_f V_i \quad \text{e } \rho_f \text{ densità del fluido}$$

$$\Rightarrow \bar{F}_A = -m_f\,\bar{g}$$

cioè la forza esercitata da un fluido in quiete sulla parte immersa di un corpo è uguale e opposta alla forza peso del fluido "spostato" (fluido altrimenti occupante il volume immerso).

* La forza però dipende solo dal volume della parte immersa di corpo: e questo anche se abbiamo posto il corpo in un contenitore con un volume di liquido minore del fluido "spostabile", perché $\bar{F}_A$ dipende solo dall'integrale della pressione sulla superficie immersa.
* La $\bar{g}$ è quella osservata: in un sdr non inerziale (accelerato) vanno considerate le forze apparenti (cfr. esempio della centrifuga in rotazione o di cassone di camion in moto accelerato, contenente acqua).

Centro di spinta ed equilibrio

Per un sistema in equilibrio devono annullarsi sia la risultante delle forze $\bar{F}_A$, $\bar{F}_g$ sia il momento delle forze. Valutiamo quest'ultimo, rispetto a un polo generico O.

$\bar{F}_G$ sul corpo è applicata nel centro di massa G, perciò

$$\bar{M}_{peso,C} = (\bar{x}_G - \bar{x}_O) \times m_C \bar{g}$$

Le forze di pressione sulla parte immersa del corpo danno poi un $\bar{M}_{press}$.

Se ragioniamo sul "fluido spostato", la forza peso su questo dà un momento

$$\bar{M}_{peso,F} = (\bar{x}_S - \bar{x}_O) \times m_F \bar{g}$$ con $\bar{x}_S$ posizione del centro di massa S del fluido spostato

e di nuovo c'è la pressione sulla superficie ideale che separa il fluido spostato da quello circostante, che dà luogo allo stesso momento $\bar{M}_{press}$ trovato per il corpo.

Per la statica (II eq. cardinale) richiediamo momento nullo per il fluido,

$$\Rightarrow \bar{M}_{press} + \bar{M}_{peso,F} = \phi \Rightarrow \bar{M}_{press} = -(\bar{x}_S - \bar{x}_O) \times m_F \bar{g} = (\bar{x}_S - \bar{x}_O) \times \bar{F}_A$$ forza di Archimede

ovvero il momento delle forze di pressione sul corpo immerso (rispetto a ∀ polo O) è = al momento della forza di Archimede applicata nel CENTRO DI SPINTA, ovvero il centro di massa del fluido spostato.

Se ragioniamo sul fatto che il corpo è in equilibrio si deve annullare il momento risultante

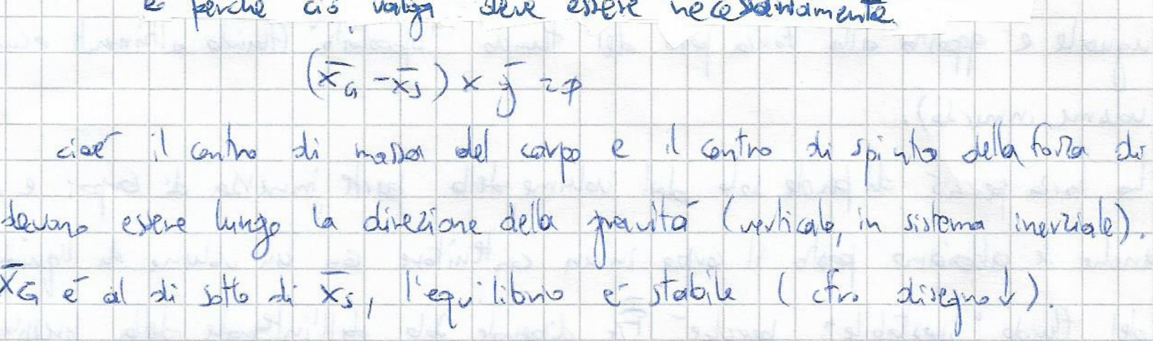
$$\bar{M}_{press} + \bar{M}_{peso,C} = \phi$$

cioè $$(\bar{x}_G - \bar{x}_O) \times m_C \bar{g} - (\bar{x}_S - \bar{x}_O) \times m_F \bar{g} = \phi$$

e perché ciò valga deve essere necessariamente

$$(\bar{x}_G - \bar{x}_S) \times \bar{g} = \phi$$

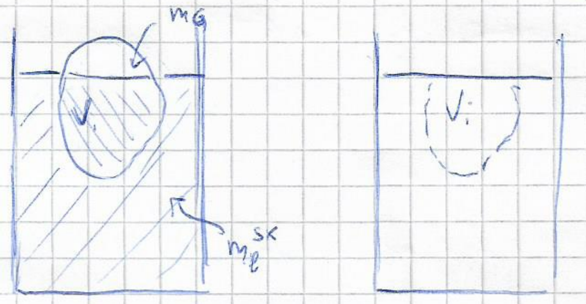
cioè il centro di massa del corpo e il centro di spinta della forza di Archimede devono essere lungo la direzione della gravità (verticale, in sistema inerziale). Se poi $\bar{x}_G$ è al di sotto di $\bar{x}_S$, l'equilibrio è stabile (cfr. disegno ↓).



equilibrio stabile — equilibrio instabile — non in equilibrio

Isostasia

Siano dati due recipienti. In uno c'è un fluido; nel secondo, avendo immerso un galleggiante lo stesso fluido giunge allo stesso livello. Se il corpo immerso galleggia, ∀ esso sia, le masse nei due contenitori sono uguali.



A sinistra, la massa totale è $m^{sx} = m_G + m_f^{sx}$ massa del corpo galleggiante m_G + massa del fluido m_f di densità ρ_f

ovvero $m^{sx} = m_G - \rho_f V_i + \rho_f V_i + m_f^{sx}$

A destra la massa è fluido di sx + massa di fluido di volume V_i

ovvero $m^{dx} = m_f^{sx} + \rho_f V_i$

$\Rightarrow m^{sx} = m_G - \rho_f V_i + m^{dx}$

Ma poiché il corpo galleggia, la massa del fluido "spostato" $\rho_f V_i$ è = a quella del corpo! $m_G = \rho_f V_i$ per Archimede.

$\Rightarrow m^{sx} = m^{dx}$