Fluidodinamica di fluidi perfetti

Ricordiamo che è perfetto (ideale) il fluido in cui tutti i fenomeni sono reversibili.

Ciò esclude la presenza di

a* sforzi di taglio ($\rightarrow$ attrito $\rightarrow$ irreversibilità)

b* conduzione del calore ($\rightarrow$ scambio termico $\rightarrow$ irreversibilità).

In grazia di (a*) la pressione è isotropa anche nel caso dinamico e il tensore degli sforzi ha forma $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$;

e di (b*) il moto di ogni elemento è adiabatico reversibile, ovvero

$Ds/Dt = 0$ (o addirittura s = costante nel caso isoentropico).

In conclusione per descrivere completamente il fluido, servendo $(\vec{v}, \rho, p)$ ovvero 5 scalari, è sufficiente avere l'eq. di Eulero, l'eq. di continuità e l'eq. per l'entropia.

Linee di corrente (streamlines)

Si definisce linea di corrente la linea la cui tangente in $\forall$ pt dà la direzione della velocità di un elemento di fluido a un certo istante.* Attenzione, essa NON coincide con la traiettoria di un elemento (luogo dei pt percorsi all'evolvere del tempo: pathline) se non nel caso stazionario.**

Poiché se mi sposto di un $d\vec{x}$ lungo $\vec{v}$ (def. di streamline) ho $\vec{v} \times d\vec{x} = 0$, in componenti

$$\left.\begin{aligned} v_y dz - v_z dy &= 0 \\ v_z dx - v_x dz &= 0 \\ v_x dy - v_y dx &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}}$$ eq. differenziale delle linee di corrente

Si noti che diverse linee di corrente a un certo istante non si possono intersecare (a meno di $\vec{v}$ nulla) perché altrimenti l'el. fluido in quel pt avrebbe due $\neq$ vettori velocità.

[Anche una streakline non può intersecare se stessa o altre streak, perché due elementi fluidi non possono trovarsi nello stesso punto e tempo a meno che l'origine di una streakline non appartenga

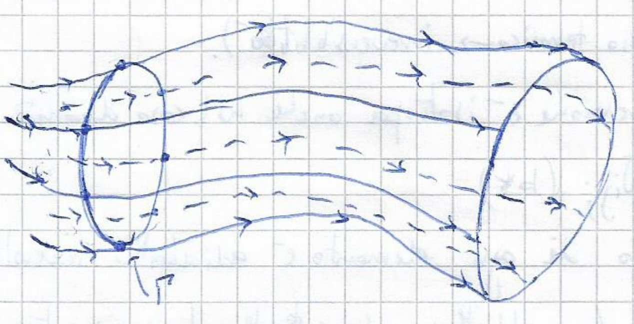
---

* = in questo senso è un concetto euleriano: fotografo il campo di velocità a un certo istante.

** = ancora diverso è il concetto di streakline, luogo dei pt degli elementi di fluido che sono passati per un pt fissato a tempi precedenti.
È quel che si visualizza iniettando un flusso puntiforme (localizzato) di colorante nel fluido e lasciando evolvere.

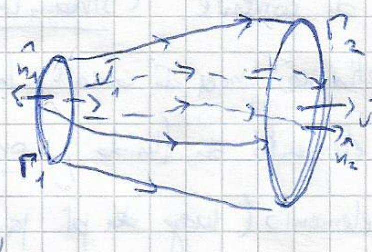
a un'altra streakline. Il discorso non vale per le pathline: una traiettoria può tornare su punti già visitati in precedenza.]

Se si prende una linea chiusa Γ nel fluido, l'insieme delle linee di corrente che passano per quel circuito è un <u>tubo di corrente</u>. Chiaramente non c'è flusso attraverso la parete laterale del tubo, per definizione di linea di corrente. La cosa diventa particolarmente interessante per il flusso <u>stazionario</u>, ove le linee di corrente coincidono con le traiettorie (si ha $\bar{v} = \bar{v}(\bar{x})$, non dipende esplicitamente da t: $\partial \bar{v}/\partial t = \phi$).



In questo caso prendendo una linea chiusa Γ_1 e seguendo le linee di corrente che vi passano, nel moto naturale Γ_1 va in una linea chiusa Γ_2 secondo un tubo di flusso/corrente. Per la stazionarietà l'equazione di continuità

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \bar{v}) = \phi$ diventa $\mathrm{div}(\rho\bar{v}) = \phi$



che integrata sul tubo (superficie chiusa) costituito dalle superfici S_1 (sottesa da Γ_1), S_2 (sottesa da Γ_1), S_ℓ (superficie laterale del tubo) richiede (usando il teorema della divergenza)

$$\int_{S_1 \cup S_2 \cup S_\ell} \rho \bar{v} \cdot \hat{n}\, da = \phi \;\; = \int_{S_1} \rho \bar{v} \cdot \hat{n}_1\, da + \int_{S_2} \rho \bar{v} \cdot \hat{n}_2\, da = \phi$$

flusso laterale nullo per def. di linea di corrente

cioè flusso entrante in S_1 = flusso uscente in S_2. In altre parole, è ovvio che nel caso stazionario vi sia <u>conservazione di massa</u> in un tubo di flusso.

Approssimando a valori medi sulle superfici le ρ e $\bar{v}$ su S_1 di area A_1 e su S_2 di area A_2, chiamando v_1 e v_2 e considerando $\bar{v}$ normali alle superfici, si ha

$\underline{\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2}$. Si chiama <u>portata</u> $q = \dot{m} = \int_S \rho \bar{v} \cdot \hat{n}\, da$ ($[q] = [M]/[T]$).

La quale, per il caso di fluido incomprimibile ($\rho_1 = \rho_2$) ha la forma ancor più semplica

$\underline{v_1 A_1 = v_2 A_2}$ (Legge di Leonardo)

Flusso di quantità di moto

La velocità di un elemento fluido è la <u>quantità di moto</u>* (QDM) per unità di massa; la QDM per udV è dunque espressa come $M\bar{v}/V = \rho\bar{v}$. Vogliamo qui valutare cosa accada alla QDM in una regione occupata dal fluido (perfetto) nel suo flusso.

La i-esima componente della quantità di moto per udV è ρv_i, e la variazione temporale

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = \rho\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

si può manipolare utilizzando l'eq. di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\bar{v}) = 0 \quad \rightsquigarrow \text{(usando la notazione tensoriale)} \quad \partial_t \rho + \partial_k \rho v_k = 0$$

e l'eq. di Eulero

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v}\cdot\mathrm{grad})\bar{v} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p - \mathrm{grad}\,u \rightsquigarrow \partial_t v_i + v_k\partial_k v_i = -\frac{1}{\rho}\partial_i p - \partial_i u$$

$$\Rightarrow \partial_t(\rho v_i) = -\rho v_k\partial_k v_i - \partial_i p - \rho\partial_i u - v_i\partial_k(\rho v_k) \qquad \text{usando } \partial_i p = \delta_{ik}\partial_k p$$

$$= -(\rho v_k)\partial_k v_i - v_i\partial_k(\rho v_k) - \partial_k p\,\delta_{ik} - \rho\partial_i u =$$

$$= -\partial_k\left(\rho v_i v_k + p\delta_{ik}\right) - \rho\partial_i u$$

e definendo $\Pi_{ik} \doteq \rho v_i v_k + p\delta_{ik}$ (che è un tensore simmetrico)

otteniamo

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial}{\partial x_k}\Pi_{ik} - \frac{\partial u}{\partial x_i}}$$

Questo è il calcolo secondo l'approccio di Landau. Si arriva allo stesso risultato ma con una certa utilità, affrontando il discorso dalla seguente prospettiva.

Se come al solito consideriamo una grandezza estensiva G e la sua grandezza relativa per udM $g \doteq G/M$, possiamo chiederci quanto sia la G trasportata attraverso una superficie S per unità di tempo, ovvero il <u>flusso di G</u>. Attraverso una sup. dS di area da con normale $\hat{n}$ ($\bar{da} = da\,\hat{n}$), per uno spostamento $d\bar{x}$ in un dt

$$d\Phi(G) = \underbrace{\rho g}_{G/dV}\underbrace{d\bar{x}\cdot\bar{da}}_{dV\text{ spazzato}}/dt = \rho g\,\bar{v}\cdot\bar{da}$$

---

*= anche detta <u>impulso</u>. (in inglese: momentum)

e integrando sulla superficie voluta

$$\Phi(G) = \int_S \rho g \bar{v} \cdot \hat{n}\, da \quad ; \quad \rho g \bar{v} \text{ è una } \underline{\text{densità di flusso}} \text{ di } G$$

Ricordando che $\rho \frac{Dg}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho g) + \mathrm{div}(\rho g \bar{v})$

e prendendo $g = v_i$, ovvero considerando $G = (QDM)_i = \int \rho v_i\, d^3x$ possiamo dire

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \mathrm{div}(\rho v_i \bar{v}) \rightsquigarrow \text{in notazione tensoriale}$$

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_i v_k)$$

Per l'eq. di Eulero $\frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}$

$$\Rightarrow \quad -\partial_i p - \rho \partial_i u = \partial_t(\rho v_i) + \partial_k(\rho v_i v_k)$$

ovvero $\partial_t(\rho v_i) = -\partial_k(\rho v_i v_k) - \partial_i p - \rho \partial_i u$

e come prima usando $\partial_i p = \partial_k p \delta_{ik}$

$$\partial_t(\rho v_i) = -\partial_k(\rho v_i v_k + p\delta_{ik}) - \rho \partial_i u = -\partial_k \Pi_{ik} - \rho \partial_i u$$

Se ora consideriamo una regione R fissa di spazio entro il flusso, possiamo integrare l'espressione su R; per R fissa vale, per una funzione h,

$$\int_R \frac{\partial h}{\partial t} d^3x = \frac{d}{dt}\int_R h\, d^3x \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}(QDM)_i = \frac{d}{dt}\int_R \rho v_i\, d^3x = \int_R \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i)\, d^3x = -\int_R \partial_k(\rho v_i v_k + p\delta_{ik})\, d^3x - \int_R \rho \partial_i u\, d^3x =$$

per il teorema della divergenza $= -\int_{\partial R} (\rho v_i v_k + p\delta_{ik}) n_k\, da - \int_R \rho \partial_i u\, d^3x =$

$$= -\int_{\partial R} \Pi_{ik} n_k\, da - \int_R \rho \partial_i u\, d^3x$$

La variazione di quantità di moto per unità di tempo risulta perciò data da un $\underline{\text{flusso}}$ – di QDM, dunque – attraverso la superficie R

+ termine di forze sul volume R (da campo di forze esterno con potenziale u).

Nel primo termine, quello di flusso, appare il tensore Π_{ik}, il cui significato risulta perciò chiaro ora, ovvero una densità di flusso di QDM; da ciò appunto il nome di Π_{ik} TENSORE DI DENSITÀ DI FLUSSO DI QUANTITÀ DI MOTO.

$\Pi_{ik} n_k da$ è la i-esima componente del flusso che attraversa la superficie da, $\Rightarrow$
$\Pi_{ik} n_k$ la i-esima componente del flusso per unità di superficie;

$$\Pi_{ik} n_k = \rho v_i v_k n_k + p \delta_{ik} n_k = \underbrace{\rho v_i v_k n_k}_{} + \underbrace{p n_i}_{}$$

ha due contributi: uno di trasporto convettivo + uno di forze di contatto (pressione) attraverso ∂R.

Presa la direzione data dal generico versore $\hat{n}$, in forma vettoriale possiamo scrivere

$$\underline{\underline{\Pi}} \cdot \hat{n} = \rho \bar{v} (\bar{v} \cdot \hat{n}) + p \hat{n}$$

contrazione tra $\underline{\underline{\Pi}}$ e $\hat{n}$, riduce a tensore di rango 1

Se $\hat{n}$ è la direzione di $\bar{v}$ velocità del fluido si vede il trasporto della componente longitudinale, pari a $\underline{\underline{\rho v^2}} + p$ (contributo di trasporto convettivo di $\rho \bar{v}$ + pressione); prendendo $\hat{n} \perp \bar{v}$ si osserva che la componente trasversale della densità di flusso è solo p.

Nota: la QDM è un vettore, e vediamo che il suo flusso è un tensore di rango 2; parimenti si vede che essendo l'energia uno scalare il suo flusso è un vettore.

Forza su un tubo a gomito

Si può determinare la forza esercitata dal flusso di un fluido perfetto su di un gomito di conduttura in cui il fluido scorre usando l'espressione trovata per il trasporto di quantità di moto. Ipotesi: fluido perfetto, fluido stazionario, ignoriamo il contributo di gravità.

Su di un elemento di superficie di tubo di area da con normale uscente dal fluido/entrante nel tubo $\hat{n}_t$ si esercita una forza:

$$d\bar{F} = p\hat{n}_t \, da$$

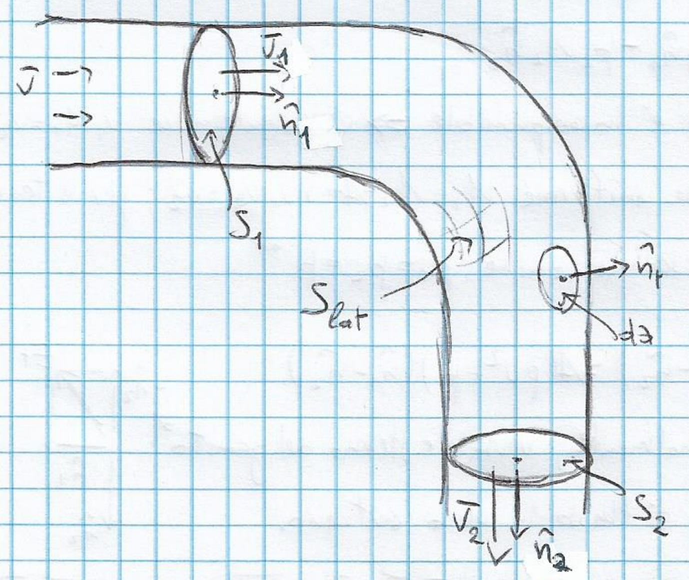
Il tensore densità di flusso di impulso $\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k$ sulla superficie del tubo si riduce a $\underline{\Pi_{ik} = p\delta_{ik}}$ perché $\bar{v}\cdot\hat{n}_t = \phi$ (il fluido non penetra nel tubo):

$$\Rightarrow \Pi_{ik} n_{t_k} \, da = (p\delta_{ik} + \rho v_i v_k) n_{t_k} \, da = p\delta_{ik} n_{t_k} \, da = p n_{t_i} \, da = dF_i$$

e $\Rightarrow$ la risultante della forza esercitata dal fluido sul tubo è l'integrale sulla superficie

$$F_i^t = \int_{S_{lat}} p n_{t_i} \, da = \int_{S_{lat}} \Pi_{ik} n_{t_k} \, da \qquad \text{con } S_{lat} \text{ superficie del tubo (cfr. disegno)}$$

Si noti che questo risultato vale perché $\bar{v}$ del fluido non ha componente normale sul tubo; se calcolassimo la forza su di una superficie ideale entro il fluido, ciò non sarebbe vero e non potremmo associare la forza all'integrale di $\underline{\underline{\Pi}}$).



Utilizziamo ora la legge trovata per la variazione di impulso

$$\partial_t(\rho v_i) + \partial_k \Pi_{ik} = \phi$$

integrandola sulla regione R del gomito di conduttura, delimitata da $\partial R = S_1 + S_2 + S_{lat}$:

$$\frac{d}{dt}(QDM)_i = \frac{d}{dt}\int_R \rho v_i \, d^3x = (+)\int_{S_1} \Pi_{ik} n_{1k}\, da - \int_{S_2} \Pi_{ik} n_{2k}\, da - \underbrace{\int_{S_{lat}} \Pi_{ik} n_{+k}\, da}_{= F_i^+}$$

$\hat n_1$ entrante (=> segno opposto) $\quad$ $\hat n_2$ uscente

Ricordiamo che abbiamo richiesto flusso stazionario, dunque la quantità di moto è costante: $d(QDM)/dt = \phi$; esplicitiamo i Π_{ik} e consideriamo un valore medio uniforme di $\vec v$ sulla sezione S_1, S_2; =>

$$F_i^+ = \left[\rho_1 v_{1i}(\vec v_1 \cdot \hat n_1) + p_1 n_{1i}\right] A_1 - \left[\rho_2 v_{2i}(\vec v_2 \cdot \hat n_2) + p_2 n_{2i}\right] A_2 = \text{ poiché } \vec v_1 \parallel \hat n_1, \hat v_2 \parallel \hat n_2$$

$$= (\rho_1 v_1 A_1) v_{1i} - (\rho_2 v_2 A_2) v_{2i} + p_1 A_1 n_{1i} - p_2 A_2 n_{2i}$$

Detta la portata la massa per unità di tempo che attraversa una superficie:

$Q = \rho v A$, per flusso stazionario questa si conserva su tutte le sezioni della conduttura, cioè $Q = \rho v A = \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$

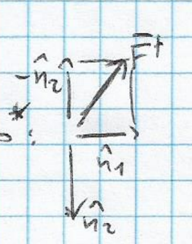
$$\Rightarrow F_i^+ = Q(v_{1i} - v_{2i}) + p_1 A_1 n_{1i} - p_2 A_2 n_{2i} \quad \text{e vettorialmente}$$

$$\vec F^+ = Q(v_1 \hat n_1 - v_2 \hat n_2) + p_1 A_1 \hat n_1 - p_2 A_2 \hat n_2$$

Riprendiamo il fatto che il flusso è incomprimibile $\Rightarrow$ Q costante dice $v_1 A_1 = v_2 A_2$ e se scegliamo un tubo di sezione uniforme $A_1 = A_2 = A \Rightarrow v_1 = v_2 = v$; per il teorema di Bernoulli (vedasi) da queste discende anche $p_1 = p_2 = p$ **

$$\Rightarrow \vec F^+ = \rho v^2 A(\hat n_1 - \hat n_2) + pA(\hat n_1 - \hat n_2) = A(\rho v^2 + p)(\hat n_1 - \hat n_2)$$

e si vede che la forza tira diagonalmente, verso l'esterno del gomito*: e ciò vale anche nel caso simmetrico di flusso in verso contrario.



---

* = dicesi "prendere il tubo in faccia"

** = o, più intuitivamente, lo si comprende dalla conservazione dell'energia totale (che è poi quanto dice Bernoulli)

Flusso di energia

Ci chiediamo quale sia la variazione dell'energia contenuta in una regione di spazio attraverso la quale vi è un flusso di fluido perfetto (ovvero il fluido trasporta energia, vediamo in quale forma).

Seguiamo per ora l'approccio di Landau: per un volume unitario la somma di energia cinetica ed energia interna è

$$\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\varepsilon$$

e la variazione temporale perciò $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\varepsilon\right)$ di cui analizziamo i due addendi.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)=\frac{1}{2}v^2\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}v^2\right)=\frac{1}{2}v^2\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\vec{v}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$$

Usiamo l'eq. di continuità $\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\operatorname{div}(\rho\vec{v})$

e di Eulero $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=-(\vec{v}\cdot\operatorname{grad})\vec{v}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p$ inserendole nell'espressione sopraltante:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)=-\frac{1}{2}v^2\operatorname{div}(\rho\vec{v})-\rho\vec{v}\cdot\underbrace{(\vec{v}\cdot\operatorname{grad})\vec{v}}_{\frac{1}{2}\vec{v}\cdot\operatorname{grad}v^2}-\vec{v}\cdot\operatorname{grad}p$$

e rimaneggiamo l'ultimo termine ricordando che

$$dw=Tds+\frac{1}{\rho}dp \implies \operatorname{grad}p=\rho\operatorname{grad}(w)-\rho T\operatorname{grad}(s)$$

$$\implies\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)=-\frac{1}{2}v^2\operatorname{div}(\rho\vec{v})-\rho\vec{v}\cdot\operatorname{grad}\left(\frac{1}{2}v^2+w\right)+\rho T\,v\cdot\operatorname{grad}(s)$$

Poiché $\varepsilon+p/\rho=w$ entalpia, e $d\varepsilon=Tds-pdv=Tds+\frac{p}{\rho^2}d\rho$,

$$d(\rho\varepsilon)=\varepsilon d\rho+\rho d\varepsilon=\varepsilon d\rho+\rho Tds+\frac{p}{\rho}d\rho=\left(\varepsilon+\frac{p}{\rho}\right)d\rho+\rho Tds=wd\rho+\rho Tds$$

$$\implies\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon)=w\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho T\frac{\partial s}{\partial t}\underset{\uparrow}{=}-w\operatorname{div}(\rho\vec{v})-\rho T\vec{v}\cdot\operatorname{grad}s$$

dall'eq. adiabatica $\frac{\partial s}{\partial t}+\vec{v}\cdot\operatorname{grad}s=0$

+ dalla continuità

Dunque sommando i due addendi (si elimina il termine $\rho T\vec{v}\cdot\operatorname{grad}s$)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\varepsilon\right)=-\left(\frac{1}{2}v^2+w\right)\operatorname{div}(\rho\vec{v})-\rho\vec{v}\cdot\operatorname{grad}\left(\frac{1}{2}v^2+w\right)$$

ovvero
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\varepsilon\right) = -\operatorname{div}\left[\rho\bar{v}\left(\frac{1}{2}v^2+w\right)\right]$$

e integrando sul volume della regione R fissa, nonché usando il teorema della divergenza,
$$\frac{d}{dt}\int_R \frac{1}{2}(\rho v^2+\rho\varepsilon)\,d^3x = -\int_{\partial R} \underbrace{\rho\bar{v}\left(\frac{1}{2}v^2+w\right)}\cdot d\bar{a}$$

↳ vettore densità di flusso di energia

variazione di energia in R (cin. + interna) = flusso uscente di energia cin. + entalpia (non ε!) trasportata dal fluido

Risostituendo $w = \varepsilon + p/\rho$,
$$\frac{d}{dt}\int_R\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\varepsilon\right)d^3x = -\int_{\partial R}\rho\bar{v}\left(\frac{1}{2}v^2+\varepsilon\right)\cdot d\bar{a} - \int_{\partial R} p\bar{v}\cdot d\bar{a}$$

dove vediamo più chiaramente il termine convettivo di flusso di en. cinetica e interna, insieme a un termine dato dal lavoro delle forze di pressione esercitate dal resto del fluido sul fluido entro il volume R

Si possono ricavare altre informazioni interessanti rivedendo il calcolo in altro modo (cfr. per es. le Note di G. Pallavicini). Consideriamo cioè come pt di partenza le forze su di un elemento di fluido; ignorando le forze di volume (di cui saranno responsabili potenziali imposti dall'esterno per es. la gravità), prendiamo una regione R e osserviamo che su ogni elemento i-esimo della sua superficie agisce una forza di pressione
$$d\bar{F} = -p\hat{n}\,da$$
da cui, se la velocità del fluido e quindi della superficie è $\bar{v}$, si ha una potenza
$$dP = -p\hat{n}\cdot\bar{v}\,da$$
e la potenza complessiva fornita dal resto del fluido alla porzione entro R è
$$P = -\int_{\partial R} p\hat{n}\cdot\bar{v}\,da \underset{\substack{\text{teorema}\\\text{della div}}}{=} -\int_R \operatorname{div}(p\bar{v})\,d^3x$$
e valutando una R piccolissima si può dire
$$P = -\operatorname{div}(p\bar{v})\,V \quad \text{con } V = \operatorname{Vol}(R)$$
Dividendo per M massa contenuta in R si ottiene la potenza per unità di massa (indicata

con $\dot{\ell}$: ovvero lavoro $\mathcal{L}$, per udM $\Rightarrow$ $\ell = \mathcal{L}/M$, e per unità di tempo, $\Rightarrow$ $\dot{\ell}$) che è erogato all'elemento di fluido dalle forze di pressione:

$$\dot{\ell} = -\operatorname{div}(p\bar{v})\,V/M = -\frac{1}{\rho}\operatorname{div}(p\bar{v})$$

Per il bilancio energetico (ovvero per il primo principio della termodinamica in caso di non equilibrio, dove il sistema può variare l'energia cinetica) applicato all'elemento di fluido nel suo moto naturale, con fluido perfetto (e $\Rightarrow$ senza scambio di calore),

la variazione di energia (cinetica + interna) dev'essere eguagliata dal lavoro delle forze esterne; in termini di potenza per udM

$$\frac{D}{Dt}\frac{1}{2}v^2 + \frac{D}{Dt}\varepsilon = \dot{\ell} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{div}(p\bar{v})$$

Osserviamo separatamente prima la derivata sostanziale dell'en. cinetica

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \bar{v}\cdot\frac{D\bar{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\bar{v}\cdot\operatorname{grad}p = -\frac{1}{\rho}\operatorname{div}(p\bar{v}) + \frac{1}{\rho}p\operatorname{div}\bar{v}$$ e quindi

$$\operatorname{div}(p\bar{v}) = \bar{v}\cdot\operatorname{grad}p + p\operatorname{div}\bar{v}$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = -\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right) - \frac{1}{\rho}\operatorname{div}(p\bar{v}) = -\frac{1}{\rho}p\operatorname{div}\bar{v}$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = -\frac{1}{\rho}p\operatorname{div}\bar{v}$$

fa notare che per un fluido perfetto incomprimibile ($\Leftrightarrow \operatorname{div}\bar{v} = \emptyset$) l'energia interna è una costante del moto; nel caso di flusso stazionario (linee di corrente = traiettorie) ε è costante lungo una linea di corrente.

Ricordando che per la generica grandezza g vale $\rho\frac{Dg}{Dt} = \frac{\partial(\rho g)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho g\bar{v})$,

(1) da $\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}v^2 + \varepsilon\right) = -\frac{1}{\rho}\operatorname{div}(p\bar{v})$ abbiamo

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}v^2 + \varepsilon\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{1}{2}v^2 + \varepsilon\right)\right] + \operatorname{div}\left[\rho\left(\frac{1}{2}v^2 + \varepsilon\right)\bar{v}\right] = -\operatorname{div}(p\bar{v})$$

ossia

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{1}{2}v^2 + \varepsilon\right)\right] = -\operatorname{div}\left[\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \underbrace{\rho\varepsilon + p}_{\rho w}\right)\bar{v}\right] = -\operatorname{div}\left[\rho\left(\frac{1}{2}v^2 + w\right)\bar{v}\right]$$

e integrando sul volume di una regione R fissa nel tempo abbiamo

$$\frac{d}{dt}\int_R \left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\varepsilon\right)d^3x = -\int_{\partial R}\rho\bar{v}\left(\frac{1}{2}v^2+w\right)\cdot d\bar{a} = -\int_{\partial R}\rho\left(\frac{1}{2}v^2+\varepsilon\right)\bar{v}\cdot d\bar{a}-\int_{\partial R}p\bar{v}\cdot d\bar{a}$$

come già trovato col calcolo di Landau

② $$\rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)+\mathrm{div}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\bar{v}\right) = -\mathrm{div}(p\bar{v})+p\,\mathrm{div}\,\bar{v}$$

ossia

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) = -\mathrm{div}\left[\left(\frac{1}{2}\rho v^2+p\right)\bar{v}\right]+p\,\mathrm{div}\,\bar{v}$$ che integrata su R fissa dà

$$\frac{d}{dt}\int_R\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)d^3x = -\int_{\partial R}\frac{1}{2}\rho v^2\bar{v}\cdot d\bar{a}-\int_{\partial R}p\bar{v}\cdot d\bar{a}+\int_R p\,\mathrm{div}\,\bar{v}\,d^3x$$

L'interpretazione è che la variazione di en. cinetica per unità di tempo in R è dovuta al flusso convettivo di en. cinetica trasportata dal fluido nel flusso attraverso ∂R + la potenza delle forze di pressione su ∂R dal resto del fluido + un termine che è a scapito dell'en. cinetica ($p\,\mathrm{div}\,\bar{v}$), ovvero parte della potenza non va in energia cinetica. Si noti infatti che prendendo R come regione che contenga tutto il fluido e questo sia isolato (e ciò significa $\bar{v}=\phi$ su ∂R, $p=\phi$ su ∂R), i termini di flusso sono nulli e

$$\frac{d}{dt}\int_R\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)d^3x = \int_R p\,\mathrm{div}\,\bar{v}\,d^3x$$ ovvero l'en. cinetica non è conservata nel fluido isolato

③ $$\rho\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\varepsilon\bar{v}) = -p\,\mathrm{div}\,\bar{v}$$

e integrando su R fissa

$$\frac{d}{dt}\int_R\rho\varepsilon\,d^3x = -\int_{\partial R}\rho\varepsilon\,\bar{v}\cdot d\bar{a}-\int_R p\,\mathrm{div}\,\bar{v}\,d^3x$$

dove si vede che la variazione di energia interna è dovuta al termine di flusso convettivo e al termine di conversione da en. cinetica a interna $-p\,\mathrm{div}\,\bar{v}$. Per il fluido isolato contenuto completamente in R

$$\frac{d}{dt}\int_R\rho\varepsilon\,d^3x = -\int_R p\,\mathrm{div}\,\bar{v}\,d^3x$$ anche l'en. interna non si conserva

Nota: lo scambio en. cinetica - en. interna può essere a favore di $\forall$ delle due, e ciò è reversibile; nel solo caso incompressibile, $\mathrm{div}\,\bar{v}=\phi$ e le due sono individualmente conservate nel moto.

Flusso di energia in campo esterno

Se abbiamo il fluido immerso in un campo di forze di volume $\bar{f}_v$ e possiamo definire un potenziale u / $\bar{f}_v = -\mathrm{grad}\, u$ e u non ha dipendenza esplicita dal tempo, ovvero $\partial u/\partial t = \phi$, è sufficientemente indolore la generalizzazione dell'espressione già trovata per il flusso di energia.

Anche queste forze impartiscono potenza sull'elemento di fluido, detta

$$P_v = \bar{f}_v \cdot \bar{v} = -\mathrm{grad}\, u \cdot \bar{v} \overset{\text{poiché } \frac{\partial u}{\partial t}=0}{=} -\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{v} \cdot \mathrm{grad}\, u\right) = -\frac{Du}{Dt}$$

Dunque il bilancio energetico imposto dal primo principio della termodinamica* diventa

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}v^2 + \varepsilon\right) = \underbrace{-\frac{1}{\rho}\,\mathrm{div}(p\bar{v})}_{\text{potenza erogata dalla pressione del restante fluido}} \underbrace{-\frac{Du}{Dt}}_{\text{potenza erogata dal campo esterno (conservativo) di forze di volume}}$$

e perciò

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}v^2 + \varepsilon + u\right) = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{div}(p\bar{v}) \qquad \text{e con la solita relazione } \rho\frac{Dg}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho g) + \mathrm{div}(\rho g \bar{v})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{1}{2}v^2 + \varepsilon + u\right)\right] = -\mathrm{div}\left[\rho\left(\frac{1}{2}v^2 + \varepsilon + u\right)\bar{v}\right] - \mathrm{div}(p\bar{v}) =$$

$$= -\mathrm{div}\left[\rho\left(\frac{1}{2}v^2 + w + u\right)\bar{v}\right]$$

Possiamo definire l'en. meccanica $\varepsilon_m \doteq \frac{1}{2}v^2 + u$ e più compattamente

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho(\varepsilon_m + \varepsilon)\right] = -\mathrm{div}\left[\rho(\varepsilon_m + w)\bar{v}\right] \qquad \text{e in forma integrale}$$

$$\frac{d}{dt}\int \rho(\varepsilon_m + \varepsilon)\, d^3x = -\int_{\partial R} \rho(\varepsilon_m + w)\bar{v} \cdot d\bar{a} = -\int_{\partial R} \rho(\varepsilon_m + \varepsilon)\bar{v} \cdot d\bar{a} - \int_{\partial R} p\bar{v} \cdot d\bar{a}$$

dove valgono le stesse considerazioni già fatte prima sul significato, sullo scambio $\varepsilon_m \rightleftarrows \varepsilon$, ...

---

* = per il bilancio, tutto il lavoro compiuto dall'esterno (per unità di tempo e massa) sull'elemento fluido, sottratto del calore ceduto dall'el. fluido all'esterno (per unità di tempo e massa) è uguale alla variazione (= derivata sostanziale) dell'energia meccanica (cinetica + potenziale) e dell'energia interna dell'elemento di fluido (per unità di massa) [forma generale, di non equilibrio del I principio].