Equazione di Bernoulli

Questa equazione esprime una proprietà di conservazione che vale nel caso di flusso stazionario cioè quando in ogni $\forall$ pt del fluido la velocità è costante nel tempo, cioè $\vec{v}(x,y,z,t) \to \vec{v}(x,y,z)$, e come già accennato le linee di corrente sono dunque coincidenti con le traiettorie degli elementi fluidi.

La trattazione di Landau ha come punto di partenza l'eq. di Eulero nella forma in cui da $\boxed{-\frac{1}{\rho}\text{grad}\, p}$ si passa a $\boxed{-\text{grad}\, w}$, il che ha per implicito il fatto che le forze di pressione ammettano potenziale, o come abbiamo visto, si si trovi nel caso isentropico per cui $dw = Tds + \frac{1}{\rho}dp = \frac{1}{\rho}dp \Rightarrow \text{grad}\, w = \frac{1}{\rho}\text{grad}\, p$. Ciò in realtà non è necessario, e si può partire dalla forma più semplice e generale dell'eq. di Eulero che includa anche un potenziale originato da forze di volume (per es. la gravità):

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\text{grad}\, p - \text{grad}\, u$$

e moltiplicando scalarmente per $\vec{v}$

$$\vec{v}\cdot\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{D}{Dt}\frac{1}{2}v^2 = -\vec{v}\cdot\frac{1}{\rho}\text{grad}\, p - \vec{v}\cdot\text{grad}\, u$$

Da $dw = Tds + \frac{1}{\rho}dp \rightsquigarrow \text{grad}\, w = T\,\text{grad}\, s + \frac{1}{\rho}\text{grad}\, p$

e dall'eq. adiabatica $\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v}\cdot\text{grad}\, s = 0$

si ottiene

$$\frac{1}{\rho}\vec{v}\cdot\text{grad}\, p = \vec{v}\cdot\text{grad}\, w - T\vec{v}\cdot\text{grad}\, s = \vec{v}\cdot\text{grad}\, w + T\frac{\partial s}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = -\vec{v}\cdot\text{grad}\, w - T\frac{\partial s}{\partial t} - \vec{v}\cdot\text{grad}\, u$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = -\vec{v}\cdot\text{grad}\left(\frac{1}{2}v^2 + w + u\right) - T\frac{\partial s}{\partial t}$$

Imponendo flusso stazionario, le $\partial/\partial t$ si annullano e si trova

$$\vec{v}\cdot\text{grad}\left(\frac{1}{2}v^2 + w + u\right) = 0$$

Dalla relazione tra gradiente e derivata direzionale lungo la direzione di versore $\hat{l}$ e spostamento $d\vec{l} = dl\,\hat{l}$, $df = \text{grad}\, f\cdot d\vec{l}$, se consideriamo $\hat{l}$ lungo una linea di corrente $\vec{v} /\!/ d\vec{l} \Rightarrow \vec{v}\cdot\text{grad}\, f = v\frac{df}{dl}$ dunque otteniamo che

$$v \frac{d}{dl}\left(\frac{1}{2}v^2 + w + u\right) = 0$$ lungo linea di corrente cioè

$$\boxed{\frac{1}{2}v^2 + w + u = \text{costante}}$$ lungo una linea di corrente (il valore della costante sarà in generale $\neq$ spostandosi da linea a linea)

eq. di Bernoulli

e in forme equivalenti $$\frac{1}{2}v^2 + \varepsilon + \frac{p}{\rho} + u = \text{costante}$$

$$\varepsilon_m + w = \text{costante}$$

$$\frac{1}{2}v^2 + \varepsilon + \frac{p}{\rho} + gz = \text{costante}$$ nel caso $\bar{g} = -\text{grad}\, u = -g\hat{e}_z$ $\Rightarrow u = gz$

Si può vedere più chiaramente che l'eq. di Bernoulli deriva dalla conservazione dell'energia con una dimostrazione alternativa.

Dall'espressione trovata per la variazione di energia,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}v^2 + \varepsilon + u\right) = -\,\text{div}\left[\rho\left(\frac{1}{2}v^2 + w + u\right)\bar{v}\right]$$

nel caso stazionario $\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_m + \varepsilon) = 0 \Rightarrow \text{div}\left[\rho\left(\frac{1}{2}v^2 + w + u\right)\bar{v}\right] = 0$

e in forma integrale,

$$\int_{\partial R} \rho\left(\frac{1}{2}v^2 + w + u\right)\bar{v}\cdot\hat{n}\, da = 0$$

Prendendo come R un tubo di corrente, si noti che all'integrale non contribuiscono le pareti laterali del tubo, ma solo le due sezioni che lo chiudono S_1, S_2. Se prendiamo un tubo di diametro ∞esimo, ovvero che tende a racchiudere una sola linea di corrente, i valori di ρ e $\bar{v}$ su ogni sezione si assumono uniformi e l'integrale diventa

$$-\rho_1(\varepsilon_{m1} + w_1)\,\bar{v}_1\cdot\hat{n}_1\, dA_1 + \rho_2(\varepsilon_{m2} + w_2)\,\bar{v}_2\cdot\hat{n}_2\, dA_2$$

a cui si aggiunge la conservazione della portata, ovvero l'eq. di continuità nel caso stazionario*

$$-\rho_1\bar{v}_1\cdot\hat{n}_1\, dA_1 + \rho_2\bar{v}_2\cdot\hat{n}_2\, dA_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{m1} + w_1 = \varepsilon_{m2} + w_2$$

* = o ancora, in altre parole, la conservazione della massa entro una regione di spazio fissa, per flusso stazionario

e dunque $\quad \mathcal{E}_m + W = \text{costante}$

ovvero $\quad \boxed{\frac{1}{2}v^2 + w + u = \text{costante}}$ lungo la linea di corrente

- **Fluido incomprimibile**

Si era visto, studiando il flusso di energia del fluido perfetto, che

$$\frac{D\mathcal{E}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\, p \operatorname{div} \vec{v}$$

e perciò nel caso di fluido incomprimibile, per il quale $\operatorname{div}\vec{v} = 0$, l'energia interna $\mathcal{E}$ viene conservata nel moto naturale dell'elemento fluido (costante del moto), ovvero sia è costante lungo una linea di corrente. Da ciò

$$\frac{1}{2}v^2 + w + u = \frac{1}{2}v^2 + \mathcal{E} + \frac{p}{\rho} + u = \text{costante}$$

si riduce a $\quad \boxed{\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + u = \text{costante}}$ lungo linea di corrente

- **Fluido reale**

Se per il fluido ideale abbiamo la conservazione della grandezza energetica di cui sopra,

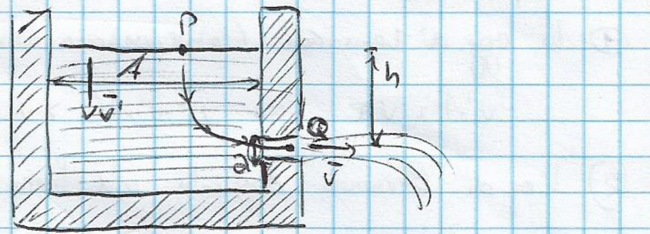
$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}v^2 + w + u\right) = 0,$$

nel fluido reale ci sarà una perdita dovuta agli attriti, una cosiddetta "perdita di carico" $\dot{\ell}$

per cui $\quad \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}v^2 + w + u\right) = -\dot{\ell} < 0 \qquad$ ($\dot{\ell}$ potenza dissipata per udM)

Teorema di Torricelli

Un'interessante conseguenza dell'eq. di Bernoulli per un flusso <u>stazionario</u> e <u>incomprimibile</u>, considera la situazione di un serbatoio di sezione orizzontale A e scarico laterale di sezione $a \ll A$. Caricato di fluido (acqua) fino a un livello h rispetto allo scarico, determiniamo la velocità di deflusso, ovvero di uscita del fluido dallo scarico.



Poiché il fluido non penetra nelle pareti, la velocità v_n normale alle pareti è nulla sulla loro superficie, => le pareti di serbatoio e scarico costituiscono un tubo di corrente (o di flusso, in condizioni stazionarie).

Dette v' e v le velocità del pelo libero superiore e del deflusso nello scarico, rispettivamente, per conservazione della massa (legge di Leonardo) nel caso stazionario incomprimibile

$v'A = va$ e poiché $a \ll A$ $v' = \frac{a}{A} v$ è trascurabile.

Presa la linea di corrente tra P sul pelo libero e Q allo scarico,

$$\frac{1}{2} v'^2 + \frac{1}{\rho} p(P) + g z(P) = \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{\rho} p(Q) + g z(Q)$$

Trascurando v', sapendo che $p(P) = p_{atm}$ e poiché p appena fuori dallo scarico (e per approssimazione anche dentro) è di nuovo la stessa, => $p(Q) = p_{atm}$

$$\frac{1}{2} v^2 = g\left(z(P) - z(Q)\right) = gh$$

=> $\boxed{v = \sqrt{2gh}}$ Teorema di Torricelli

In pratica la velocità di uscita è pari a quella che sarebbe la velocità di caduta verticale da un'altezza h. Ciò entro varie approssimazioni, tra cui la stazionarietà del moto; nella realtà, a meno di non avere uno scarico capillare, il flusso diventa turbolento. Il risultato che però resta approssimativamente valido è la portata calcolata con questo metodo:

<u>$q \equiv va = a\sqrt{2gh}$</u>

Tubo di Venturi

Si consideri un tubo il cui asse longitudinale sia orizzontale (così da ignorare effetti di quota in Bernoulli). Il tubo parte da una sezione di area A (pt P sull'asse) e poi ha una strozzatura più avanti (pt Q) riducendosi a sezione $a < A$. Per il caso di flusso stazionario e incomprimibile,

① la legge di Leonardo (conservazione della massa), se v = vel. in Q, v' = vel. in P,

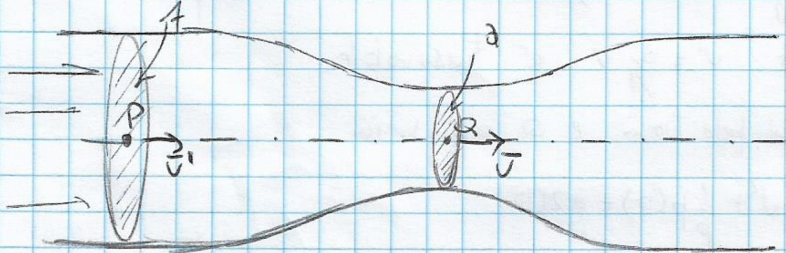
$$v'A = va \implies v = v'A/a > v'$$ la velocità aumenta nella strozzatura;

② l'eq. di Bernoulli applicata alla linea di flusso tra P e Q afferma

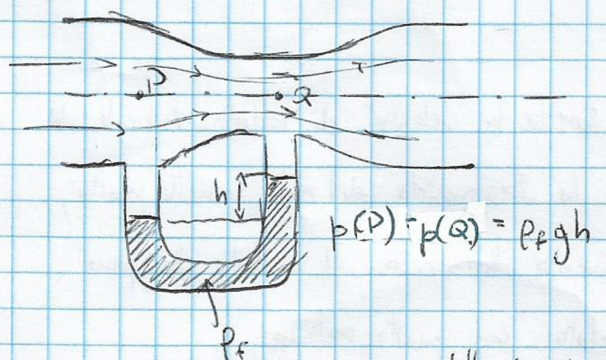
$$\frac{1}{2}v'^2 + \frac{1}{\rho}p(P) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{\rho}p(Q) \qquad [\,z(P) = z(Q)\,]$$

$$\implies p(Q) - p(P) = \frac{1}{2}\rho(v'^2 - v^2) = \frac{1}{2}\rho v'^2\left[1 - (A/a)^2\right] < 0$$

la p diminuisce nella strozzatura (è il cosiddetto "paradosso idrodinamico")



Se si aggiunge un manicotto a U tra le sezioni A e a, con un fluido pesante all'interno,*
poiché in questo tubo i fluidi sono in quiete si può misurare la differenza di p (p statica)**
come differenza di quota h (cfr. disegno) e di qui ricavare velocità / portata



* = ovvero, quello che è il principio del MANOMETRO

** = nell'eq. di Bernoulli i due termini $\frac{1}{2}\rho v^2$ e p hanno le dimensioni della pressione; è usuale chiamare p pressione statica, mentre $\frac{1}{2}\rho v^2$ è detta pressione dinamica

Cavitazione

In una situazione come il tubo di Venturi, dopo la strozzatura (in cui $\bar{v}$ aumenta e p diminuisce), all'occorrenza di un nuovo slargo, si ha il fenomeno inverso, per cui la pressione statica aumenta nuovamente.

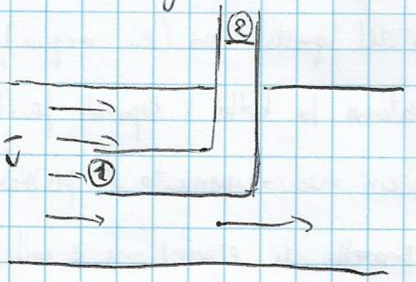
In ogni fluido sono presenti bolle d'aria: gas non disciolto nel fluido, che può formare bolle con l'aiuto di centri di nucleazione quali impurità o rugosità delle pareti. Le bolle hanno una pressione interna che è la pressione di vapore saturo del liquido stesso (es.: acqua), e sono in equilibrio con la p esterna. Entrando nella strozzatura la bolla si espande perché la p esterna diminuisce, e poi arrivando allo slargo subisce un nuovo aumento di pressione; il tutto avviene velocemente (con il flusso nel tubo) e il processo di espansione e collasso successivo (processo detto appunto CAVITAZIONE)* genera onde acustiche, ovvero il rumore che talvolta si avverte nelle tubazioni (quel rumore quasi di ghiaia che scorre e raschia in un contenitore).

Il collasso di una bolla lontano da parete è immaginabile come simmetrico; invece, nei pressi di una superficie, non c'è simmetria di forze e avviene un'introflessione per cui il liquido viene accelerato (risucchiato) verso la parete stessa, ad alta velocità, dando luogo a fenomeni microscopici di erosione che, prolungati nel tempo, sottopongono a rischio di cedimento strutturale. Il fatto è ben noto in macchine idrauliche quali pompe o eliche.

* = il fenomeno è simile all'ebollizione; questa è dovuta all'azione della temperatura (il liquido raggiunge la temp. di saturazione); invece nella cavitazione il ruolo è preso dalla p, che scende sotto la p di vapore saturo.

Tubo di Pitot - sistema Pitot-statico

⊙ Henry Pitot propose già nel 1732 un metodo per misurare la velocità di correnti di fluido o di imbarcazioni, con cui venne per esempio misurata la velocità della Senna a Parigi. Il più semplice <u>tubo di Pitot</u> è ad angolo e viene immerso nel fluido con l'imboccatura (pt 1) contro la $\vec{v}$ stessa, perturbando il meno possibile il flusso. Nella sua continuazione ad angolo retto il fluido giunge al <u>punto di stagnazione</u>, cioè è fermo (pt 2).



Trascurando il termine di potenziale altimetrico $\rho g h$, Bernoulli per il caso incomprimibile afferma che

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2$$

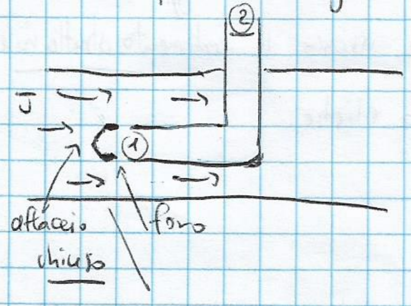
ϕ al punto di stagnazione

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{2(p_2 - p_1)/\rho}$$

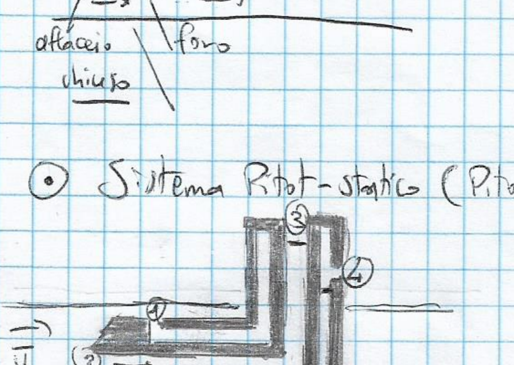
Se si misura la p_1 pressione statica nel pt 1, insieme alla p_2 di stagnazione si può determinare la velocità in ① nel flusso.

⊙ Presa statica (static port)

È proprio quel che serve per misurare la p_1 statica. Il condotto deve avere una o più aperture ortogonali al flusso; $\Rightarrow v_1 = v_2 = \phi$ e $\Rightarrow p_1 = p_2$.



⊙ Sistema Pitot-statico (Pitot-static system): il tubo di Pitot (più interno) e la presa statica (esterna) sono due tubi coassiali.



Per la presa statica, $p_1 = p_4$

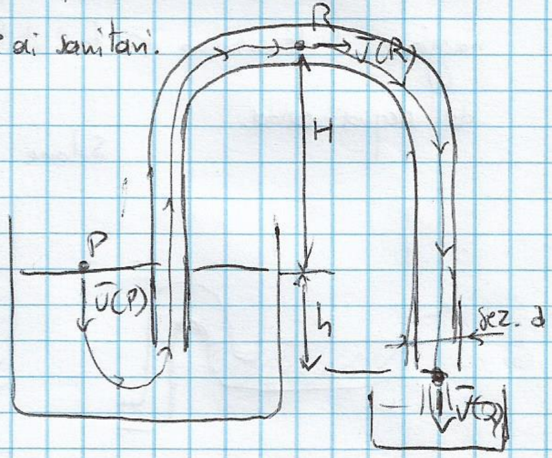
Per Pitot, $v_2 = \sqrt{2(p_3 - p_2)/\rho}$ ma $p_2 = p_1 = p_4$ (p statica nel flusso)

$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{2(p_3 - p_4)/\rho}$$

Le pressioni p_3, p_4 o loro differenza sono misurate (con un manometro differenziale, per esempio) e si ottiene la velocità del flusso. Lo strumento è impiegato normalmente da aerei e auto da corsa.

Sifone

Anche la meravigliosa esperienza dell'imbottigliamento del vino da una damigiana ci viene regalata, tramite Bernoulli, dal principio del sifone, con cui si può trasferire un liquido attraverso un dislivello, tra un bacino e un tubo con scarico più in basso del livello del bacino stesso, finché il tubo stesso è pieno. Si applica ugualmente ai sanitari.



Con riferimento al disegno (→), il bacino ha un pelo libero con pt generico P, da cui seguiamo una linea di corrente che risale un dislivello positivo H nel tubo fino alla quota massima (pt R) per scendere fino allo scarico (pt Q) con quota più bassa di h rispetto a P. Si ha pressione $p(P) = p(Q) = p_{atm}$, e velocità del pelo libero $\vec{v}(P)$ di entità trascurabile perché l'area del bacino è $\gg$ sezione del tubo (conservazione della massa in flusso stazionario incomprimibile). Per l'eq. di Bernoulli

$$\underbrace{\frac{1}{2}v^2(P)}_{\text{trascurabile}} + gz(P) + \cancel{\frac{1}{\rho}p_{atm}} = \frac{1}{\rho}v^2(Q) + gz(Q) + \cancel{\frac{1}{\rho}p_{atm}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}v^2(Q) = g\big(z(P)-z(Q)\big) = gh \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{2gh}} \quad \text{e portata } va = a\sqrt{2gh}$$

così come per il teorema di Torricelli. Si noti che è richiesto $h > \emptyset$, ovvero scarico più basso del livello del bacino (riempita la bottiglia, basta sollevarla).

C'è un limite al dislivello H superabile? Applicando l'eq. di Bernoulli tra P e R,

$$\underbrace{\frac{1}{2}v^2(P)}_{\text{trascurabile}} + gz(P) + \frac{1}{\rho}p_{atm} = \frac{1}{2}v^2(R) + gz(R) + \frac{1}{\rho}p(R)$$

e imponiamo che la pressione resti positiva (altrimenti non ha senso fisico):

$$p(R) = p_{atm} + \rho g\big(z(P)-z(R)\big) - \frac{1}{2}v^2(R) = p_{atm} - \rho gH - \frac{1}{2}\rho v^2(R) \geq \emptyset$$

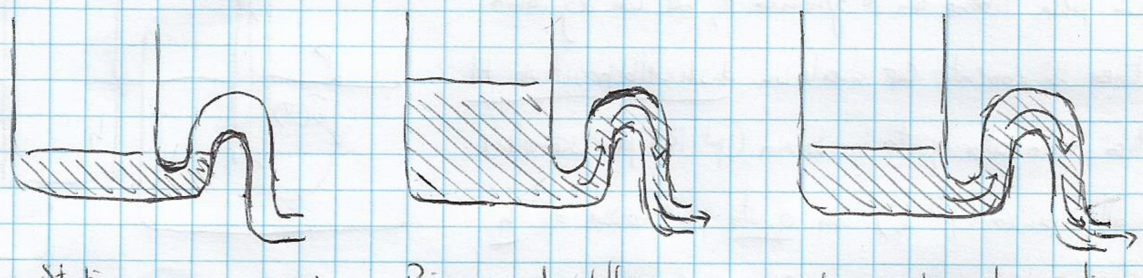
$$\Rightarrow \rho gH \leq p_{atm} - \frac{1}{2}\rho v^2(R)$$

e il valore massimo è quello in cui $v(R) = \emptyset$ ovvero

$$\boxed{H_{max} = p_{atm}/\rho g}$$ (altezza massima = altezza del salto di p pari a p atmosferica)

Ancora una volta, la presenza di gas non disciolto e la formazione di bolle d'aria può arrestare il flusso ad altezza minore di H_{max}, perché la pressione che diminuisce nel tubo (strozzatura) non equilibra più la p interna alle bolle (≥ p di vapore saturo del liquido) e queste si espandono, bloccando il flusso. Laddove la p di vapore saturo è maggiore, il fenomeno è facilitato: motivo per cui il blocco è più facile nelle tubazioni dell'acqua calda.

Sifone di lavandino o wc



Statico; non c'è comunicazione (flusso) tra vasca e scarico →

Riempimento della vasca: il livello sale oltre il dislivello e può iniziare il flusso

Lo svuotamento continua finché il livello nella vasca è superiore a quello dello scarico

Portanza

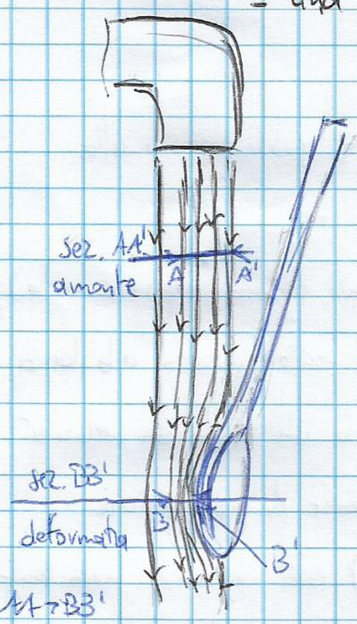
... ovvero cos'hanno in comune aerei e cucchiai da minestra.

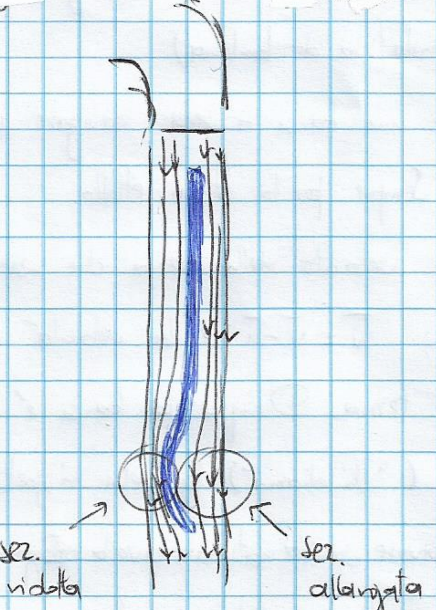
Cucchiaio nel getto del rubinetto

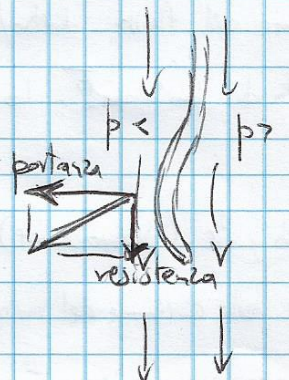
Avvicinando un cucchiaio al getto del rubinetto dalla parte convessa, invece di essere spinto fuori il cucchiaio è risucchiato nel flusso, molto tangibilmente. Ciò avviene perché se consideriamo un tubo di corrente a monte, l'inserzione del cucchiaio ne riduce la sezione; quindi per l'eq. di Bernoulli la velocità è localmente maggiore e la p minore; sull'altra faccia del cucchiaio a) se fuori dal getto la $p = p_{atm}$ è maggiore (cfr. disegno a sx);

b) se entro il getto, si ha un tubo di flusso allargato ($\Rightarrow \bar{v}\downarrow$, $p\uparrow$) e di nuovo pressione maggiore (cfr. disegno a dx).

In tutti i casi la p sulla faccia convessa è minore e quindi si applica al cucchiaio una forza, con
- una parte normale al cucchiaio, predominante, detta PORTANZA (lift);
- una parte lungo il cucchiaio (in direzione e verso del getto) detta RESISTENZA (drag).

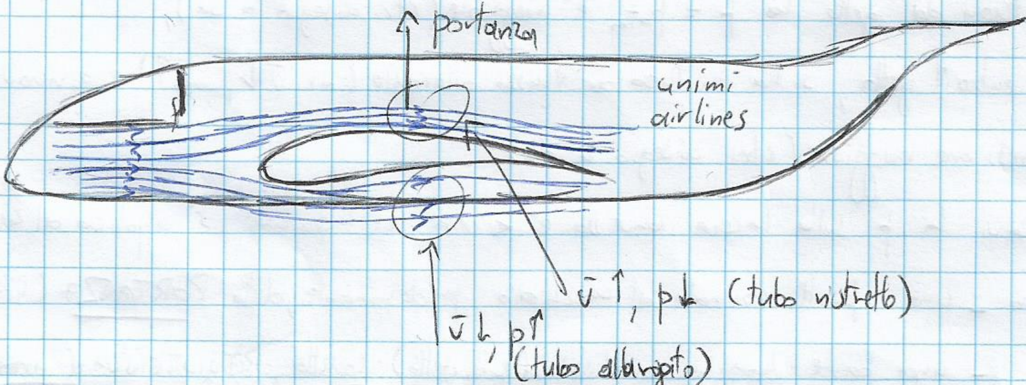






Volo aereo

Il volo aereo è del tutto simile al cucchiaio nel getto; qui la superficie curva utile al brodo, lì l'ala sagomata opportunamente. Data infatti una velocità orizzontale dell'aereo $\bar{u}$, nel sdr a esso solidale vediamo un flusso d'aria verso il fronte dell'ala e di nuovo una restrizione del tubo di flusso sulla parte superiore / dilatazione del tubo di flusso sulla parte inferiore dell'ala; $\Rightarrow p_{up} < p_{down}$, e c'è un effetto di resistenza orizzontale ma soprattutto di portanza verticale verso l'alto, che tiene su l'aereo (cfr. disegno ↓).



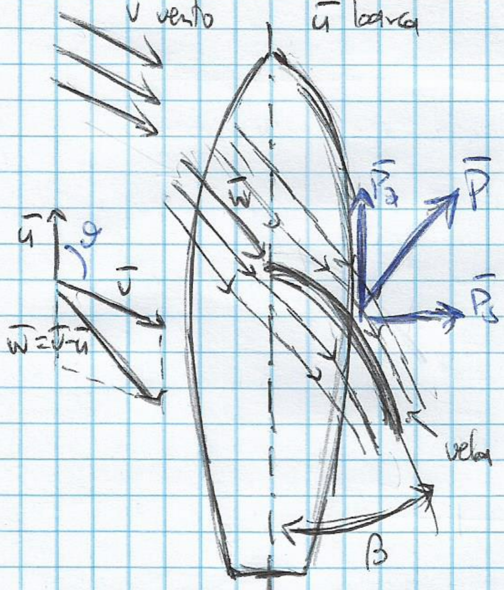
Barca controvento (andatura di bolina)

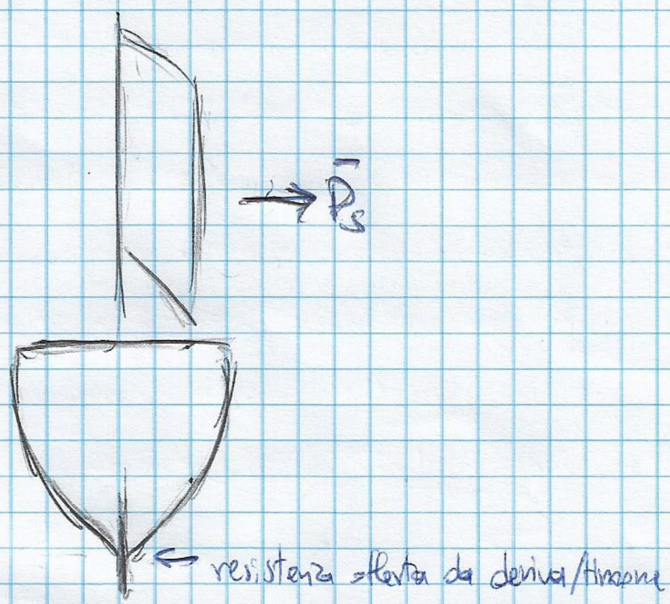
Perché è possibile per una barca a vela navigare con un vento quasi opposto alla velocità della barca? Sempre per lo stesso effetto.

Diciamo che $\bar{u}$ è la velocità della barca che osserviamo (senza ancora capire come fa); $\bar{v}$ la velocità del vento; $\bar{w} = \bar{v} - \bar{u}$ è la velocità <u>relativa</u> del vento rispetto alla barca, nel sdr in cui essa è ferma. Dunque la barca è investita da un flusso con velocità $\bar{w}$ e noi inclidiamo ("chiudiamo") la vela rispetto alla direzione di navigazione (se avessimo vento a favore sarebbe naturale averla ortogonale a $\bar{u}$) così da avere circa lungo $\bar{w}$; ancora una volta si ottiene dilatazione / compressione del flusso dietro / davanti la vela e dunque p maggiore / p minore dietro / davanti, con effetto di portanza $\bar{P}$. La $\bar{P}$ si scompone lungo direzione $\parallel \bar{u}$ $(\bar{P}_3)$ e $\perp \bar{u}$ $(\bar{P}_s)$.

La $\bar{P}_s$ esercita forza che tende a muovere lateralmente (scarrocciare) la barca rispetto alla direzione della prua (scarroccio = angolo tra prua e reale direzione del moto), ma è equilibrata dalla presenza di deriva e timone che vi si oppongono (senza questi, non si va di bolina!).

La $\bar P_a$ invece permette il moto lungo la direzione della barca, così da avere appunto $\bar u$.





Sperimentalmente ci si aspetta che P_a sia una funzione crescente di w, in particolare di w^2, dato Bernoulli. Detto ϑ l'angolo fra $\bar u$ e $\bar v$,

$$w^2 = v^2 + u^2 - 2vu\cos\vartheta$$

e
- se $\vartheta > \pi/2$, $\cos\vartheta < 0$ $\Rightarrow$ w^2 è crescente con la u della barca, e così la portanza P_a;
- se $\vartheta < \pi/2$, $\cos\vartheta > 0$ $\Rightarrow$ w^2 e P_a si riducono con l'aumentare di $\bar u$.

Si noti che $\vartheta < \pi/2$ vuol dire <u>vento a favore</u>: scopriamo che l'andatura di bolina permette velocità maggiori! In particolare, con vento in poppa ($\vartheta = 0$) non c'è proprio effetto di portanza. Con vento esattamente di prua la portanza sarebbe pressoché del tutto laterale, del resto e in definitiva si può avere bolina con angoli di chiusura della vela β anche molto ridotti, ma non nulli.