Condizione di incomprimibilità - una prospettiva fisica

Più che parlare di fluido incomprimibile, è appropriato parlare di flusso incomprimibile, in quanto tale proprietà è legata in effetti alle caratteristiche del moto, non alla natura intrinseca del fluido.

Innanzitutto consideriamo ρ come funzione $\rho(p,s)$; il suo differenziale dunque è

$d\rho(p,s) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s dp + \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p ds$ ma per fluido perfetto, e dunque moto adiabatico, $ds = \phi$

$\Rightarrow d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s dp$; si ricava in acustica che detta c la velocità del suono nel fluido,

$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = c^2 \Rightarrow d\rho = \frac{1}{c^2} dp$;

incomprimibilità significa $d\rho/\rho \ll 1 \Rightarrow$ condizione necessaria è $\frac{d\rho}{\rho} = \boxed{\frac{1}{c^2}\frac{dp}{\rho} \ll 1}$

Imponiamo questo requisito per un flusso stazionario e non.

Flusso stazionario

L'eq. di Bernoulli che $\frac{1}{2}\Delta(v^2) + \frac{\Delta p}{\rho} = \phi$ (ignoriamo campi esterni di potenziale u)

$\Rightarrow \Delta p/\rho \sim \frac{1}{2}v^2$ come ordine di grandezza (pensando a $\Delta(v^2)$ tra un pt $\forall$ nel flusso e il pt di ristagno dove $v=\phi$ e $p = p_{max}$)

$\Rightarrow$ l'incomprimibilità richiede

$\frac{1}{c^2}\frac{\Delta p}{\rho} \sim \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \ll 1$ verificata per $\boxed{v \ll c}$, cioè velocità del fluido molto minore della velocità di propagazione delle onde sonore

Flusso non stazionario

(A) In questo caso la condizione $v \ll c$ è bastante se nel problema non si ravvisa un qualche tempo proprio, una scala di tempo che caratterizza i fenomeni osservati (il periodo di un qualche moto periodico, di un'onda, ...).

Dette ℓ e u una lunghezza e una velocità caratteristiche nell'eq. di Eulero i termini $\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}$ e $(\bar{v}\cdot \text{grad})\bar{v}$ a priori sono confrontabili.

Come ordine di grandezza, $\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \sim \frac{1}{\ell/u}u \Rightarrow \sim \frac{u^2}{\ell}$

mentre $(\bar{v}\cdot \text{grad})\bar{v} \sim u \cdot \frac{1}{\ell} u \sim \frac{u^2}{\ell}$

Dunque ha da essere $-\frac{1}{\rho}\,\text{grad}\,p \sim \frac{u^2}{\ell}$; $\text{grad}\,p \sim \frac{dp}{\ell} \Rightarrow dp \sim \rho u^2$

$$\Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{c^2}\frac{dp}{\rho} \sim \frac{1}{c^2}\frac{1}{\rho}\rho u^2 \sim \frac{u^2}{c^2}$$

e per incomprimibilità si richiede $\Rightarrow \frac{u^2}{c^2} \ll 1$ soddisfatta da $\boxed{v \sim u \ll c}$

condizione appunto già trovata per flusso stazionario

(B) Se si identifica una scala di tempo caratteristica τ,

$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \sim \frac{u}{\tau}$ mentre si è già visto $(\bar{v}\cdot\text{grad})\bar{v} \sim \frac{u^2}{\ell}$

- se domina il termine $(\bar{v}\cdot\text{grad})\bar{v}$ $\left(\frac{u}{\tau} \ll \frac{u^2}{\ell} \text{ cioè } \tau \gg \ell/u, \text{ tempi molto lunghi, flusso quasi stazionario} \right)$

  si torna alla condizione di cui sopra, $v \ll c$.
- se i due termini sono confrontabili o domina $\partial\bar{v}/\partial t \sim u/\tau$, nell'eq. di Eulero si ha

$$\frac{u}{\tau} \sim \frac{\Delta p}{\rho \ell} \Rightarrow \frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{1}{c^2}\frac{\Delta p}{\rho} \sim \frac{\ell u}{c^2 \tau}$$

Nell'eq. di continuità, richiedere l'incomprimibilità e quindi ρ invariante nel tempo significa trascurare il termine temporale:

$$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} \ll \text{div}\,\bar{v} \qquad \left(\text{oppure } \frac{\partial\rho}{\partial t} \ll \text{div}(\rho\bar{v}) = \underbrace{\bar{v}\cdot\text{grad}\,\rho}_{\phi} + \rho\,\text{div}\,\bar{v} \right)$$

ovvero dimensionalmente $\frac{1}{\rho}\frac{\Delta\rho}{\tau} \ll \frac{u}{\ell}$

cioè $\frac{\ell u}{c^2\tau}\frac{1}{\tau} = \frac{\ell u}{c^2\tau^2} \ll \frac{u}{\ell} \Rightarrow \tau^2 \gg \ell^2/c^2$

cioè $\boxed{\tau \gg \ell/c}$ $\quad (\text{o } c \gg \ell/\tau)$

che significa avere tempo proprio di variazione del flusso molto maggiore del tempo di propagazione delle onde sonore (propagazione "istantanea"; del resto $c^2 = \partial p/\partial\rho$, e se ρ = costante $c \to \infty$).

Le condizioni da rispettare risultano perciò 2: $\begin{cases} v \ll c \\ \tau \gg \ell/c \end{cases}$

Teorema di Kelvin - Conservazione della circolazione

Si era visto che data la curva $\gamma(t)$, $\frac{D}{Dt}\int_{\gamma(t)} f(\bar{x},t)\,ds_i = \int_{\gamma(t)} \left(f(\bar{x},t) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{D}{Dt} f(\bar{x},t)\,\delta_{ij} \right) ds_j$

e se $f = f_i$ i-esima componente di $\bar{f}(\bar{x},t)$ vettoriale

$$\frac{D}{Dt}\int_{\gamma(t)} \bar{f}\cdot d\bar{x} = \int_{\gamma(t)} \bar{f}\cdot d\bar{v} + \int \frac{D}{Dt}\bar{f}\cdot d\bar{x}$$

; dunque se $\bar{f} = \bar{v}$ vel. di fluido perfetto, e $\gamma(t)$ linea ideale costituita da pt del fluido nel loro moto,

$$\frac{D}{Dt}\int_{\gamma(t)} \bar{v}\cdot d\bar{x} = \int_{\gamma(t)} \bar{v}\cdot d\bar{v} + \int_{\gamma(t)} \frac{D\bar{v}}{Dt}\cdot d\bar{x} = \int_{\gamma(t)} d\left(\frac{1}{2}v^2\right) + \int_{\gamma(t)} \frac{D\bar{v}}{Dt}\cdot d\bar{x}$$

Se $\gamma(t)$ è una curva chiusa, si definisce Γ circuitazione o CIRCOLAZIONE $\Gamma \doteq \oint_{\gamma(t)} \bar{v}\cdot d\bar{l}$ e il primo integrale, $\oint d\left(\frac{1}{2}v^2\right)$ essendo l'integrale di differenziale esatto è nullo

$$\Rightarrow \frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt}\oint_{\gamma(t)} \bar{v}\cdot d\bar{l} = \oint \frac{D\bar{v}}{Dt}\cdot d\bar{l}$$

Per Eulero $\frac{D\bar{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p - \mathrm{grad}\,u$; nell'ipotesi di moto isentropico, ovvero nel caso in cui $-\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p$ ammetta potenziale, *

$$\frac{D\bar{v}}{Dt} = -\,\mathrm{grad}(w+u)$$

$$\Rightarrow \frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_{\gamma(t)} \frac{D\bar{v}}{Dt}\cdot d\bar{l} = -\oint_{\gamma(t)} \mathrm{grad}(w+u)\cdot d\bar{l} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{col teorema} \\ \text{di Stokes}}}{=} -\int_S \mathrm{rot}\left[\mathrm{grad}(w+u)\right]\cdot d\bar{S}$$

con S superficie sottesa da γ

e poiché $\mathrm{rot}(\mathrm{grad} f) = \emptyset \quad \forall f$

$$\boxed{\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt}\oint_{\gamma(t)} \bar{v}\cdot d\bar{l} = \emptyset}$$

La circolazione Γ si conserva nel moto isoentropico di fluido perfetto

(Teorema di Kelvin)

Prendendo una γ che sottenda un'area infinitesima, ci restringiamo praticamente all'intorno di una singola linea di corrente; dunque

$$\oint_{\gamma=\partial S} \bar{v}\cdot d\bar{l} = \int_S \mathrm{rot}\,\bar{v}\cdot d\bar{s} \simeq \mathrm{rot}\,\bar{v}\cdot\bar{S} = \text{costante}$$

: la vorticità $\mathrm{rot}\,\bar{v}$ si conserva nel flusso, si muove col moto naturale del fluido

---

* = Come Landau ci mettiamo nell'usuale caso isoentropico; basta inventar che $\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p$ ammetta potenziale ψ, così che $\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p = \mathrm{grad}\,\psi$; sono diversi i casi possibili:

- isentropico ; $dw = \cancel{T ds} + \frac{1}{\rho}dp = \frac{1}{\rho}dp \Rightarrow \psi = w$ entalpia
- isotermo ; $d\phi = -\cancel{s dT} + \frac{1}{\rho}dp = \frac{1}{\rho}dp \Rightarrow \psi = \phi$ energia libera di Gibbs
- incomprimibile ; $\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p = \mathrm{grad}(p/\rho) \Rightarrow \psi = p/\rho$

Flusso potenziale

La conservazione della circolazione $\Gamma = \oint_{\gamma(t)} \bar{v} \cdot d\bar{l}$ porta a osservazioni significativa. Nel caso di flusso stazionario, se vi è un pt per il quale $\text{rot}\,\bar{v} = \phi$, presa la linea di corrente che vi passa e considerata una γ vicina che la racchiude si può affermare che $\text{rot}\,\bar{v} = \phi$ su tutta la linea. Se il moto non è stazionario, il risultato vale lungo una traiettoria; ciò sempre tenendo a mente l'ipotesi di flusso isentropico, altrimenti l'osservazione non è valida (per es. in caso di urti o turbolenza).

Se supponiamo di avere un fluido in moto isentropico che all'infinito è uniforme ($\bar{v}$ uniforme; caso particolare: fluido inizialmente a riposo, con $\bar{v}$ nulla è $\Rightarrow$ uniforme; è potenziale e tale resta), $\text{rot}\,\bar{v} = \phi$ su tutte le linee di corrente all'infinito; per conservazione di Γ ne consegue che $\text{rot}\,\bar{v} = \phi$ OVUNQUE.

Il fatto che $\text{rot}\,\bar{v} = \phi$ dice che $\bar{v}$ è esprimibile come gradiente di un potenziale scalare φ:

$\bar{v} = \text{grad}\,\varphi$ $\quad$ ($\text{rot}(\text{grad}) = \phi$ identicamente)

φ è il POTENZIALE SCALARE DI VELOCITÀ e il moto è detto

FLUSSO POTENZIALE o IRROTAZIONALE. In questo flusso $\nexists$ linee di corrente chiuse: $\oint_{\gamma} \bar{v} \cdot d\bar{l} = \phi$.

Avendo $\bar{v} = \text{grad}\,\varphi$ e considerando $-\frac{1}{\rho}\,\text{grad}\,p = -\text{grad}\,\psi$, l'eq. di Eulero

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \text{grad})\,\bar{v} = -\text{grad}(\psi + u)$$ riscritta nella forma alternativa

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \text{grad}\left(\frac{1}{2}v^2\right) + \bar{v} \times \underbrace{\text{rot}\,\bar{v}}_{=\phi} = -\text{grad}(\psi + u)$$ si può ancora riscrivere

$$\frac{\partial}{\partial t}(\text{grad}\,\varphi) + \text{grad}\left(\frac{1}{2}v^2 + \psi + u\right) = \phi \Rightarrow \text{grad}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \psi + u\right) = \phi$$ ovvero

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \psi + u = f(t)$$ funzione arbitraria del solo tempo t

La $f(t)$ si può porre uguale a zero perché φ non è univocamente determinato dalla sua definizione $\bar{v} = \text{grad}\,\varphi$; in altre parole si può effettuare una trasformazione di gauge

$$\varphi' = \varphi - \int f(t)\,dt;$$

in tal modo $\text{grad}\,\varphi' = \text{grad}\,\varphi = \bar{v}$ comunque, e usando φ' nell'eq. di Eulero

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial t} + \frac{1}{2}\underset{|\text{grad}\,\varphi'|^2 = |\text{grad}\,\varphi|^2}{v^2} + \psi + u = \underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \psi + u}_{f(t)} - f(t) = f(t) - f(t) = \emptyset$$

Quindi si può scrivere

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \psi + u = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\text{grad}\,\varphi|^2 + \psi + u = \emptyset$$

⊙ Per flusso stazionario, $\partial\varphi/\partial t = \emptyset$ ⇒

$$\boxed{\frac{1}{2}v^2 + \psi + u = \emptyset} \quad \text{oppure} \quad \boxed{\frac{1}{2}|\text{grad}\,\varphi|^2 + \psi + u = \emptyset}$$

Teorema di Bernoulli generalizzato

Rispetto al teorema di Bernoulli per un ∀ flusso stazionario di fluido perfetto, qui la costante (zero) è la stessa ∀ streamline (dove la era ≠ per le ≠ streamline).

Per fluido incomprimibile,

⊙ $\psi = p/\rho$ (ε è conservata nel moto naturale e non risulta interessante mantenerla nell'equazione) ⇒ $\boxed{\frac{1}{2}v^2 + p/\rho + u = \emptyset}$ ovunque

⊙ per incomprimibilità $\text{div}\,\bar{v} = \emptyset$

$$\Rightarrow \text{div}\,\bar{v} = \text{div}(\text{grad}\,\varphi) = \nabla^2\varphi = \emptyset \qquad \text{equazione di Laplace}$$

La soluzione del moto è quindi data dall'eq. di Laplace + condizioni al contorno.

Quali sono queste condizioni al contorno? All'infinito abbiamo velocità uniforme, mentre su superfici rigide quali pareti o corpi immersi la velocità di incidenza normale relativa deve essere nulla; in termini di φ,

$$\begin{cases} \text{grad}\,\varphi\big|_\infty = \bar{v}_\infty \\ v_n\big|_{\text{corpi}} = \text{grad}\,\varphi \cdot \hat{n}\big|_{\text{corpi}} = \begin{cases} \emptyset & \text{se corpi fermi} \\ f(\bar{x}, t) & \text{velocità del boundary rigido} \end{cases} \end{cases}$$

Per l'eq. di Bernoulli generalizzata (ignorando u) la conservazione della somma cinetica + pressione tra ∞ e punti sui boundary rigidi (detti pt di arresto o ristagno, o pt critici)

$$\frac{1}{2}v_\infty^2 + \frac{p_\infty}{\rho} = p_{max}$$

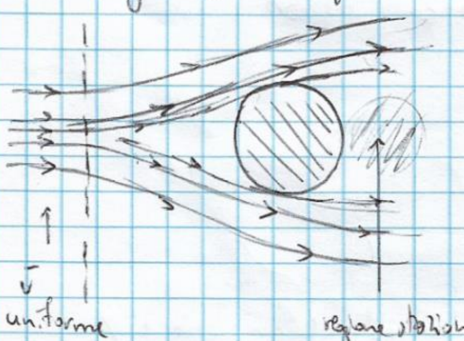
Note importanti sul moto potenziale

Sono necessarie alcune osservazioni, che Landau riporta estesamente, sulla possibilità e ragionevolezza del moto potenziale.

Flusso attorno a un ostacolo

Consideriamo un flusso di fluido perfetto che parte con velocità uniforme da infinito (molto lontano), e che quindi ci aspettiamo di poter trattare come potenziale. La circolazione Γ su un $\forall$ circuito chiuso γ attorno a una $\forall$ streamline è nulla.

Ora se da qualche parte nel flusso si trova un ostacolo, un corpo rigido, si avrà qualche linea di corrente che lambisce il corpo. Attorno a questa linea $\nexists\ \gamma$ chiusa nel fluido: la γ taglia il corpo. Dunque esistono soluzioni delle eq. del moto per cui avviene separazione sulla superficie del corpo, ovvero in cui ci sono linee di corrente che dopo un percorso tangenziale al corpo se ne staccano, continuando nel fluido; ne consegue una discontinuità della velocità tangenziale, una superficie di discontinuità tangenziale sulla quale $\text{rot}\,\vec{v} \neq \emptyset$ (cfr. disegno) e sulla quale gli strati di fluido hanno uno scivolamento gli uni sugli altri. In ragione della discontinuità, le soluzioni discontinue ammesse sarebbero infinite, ma anche non significative nel contesto di flusso irrotazionale, isentropico, perché instabili e foriere di turbolenza.



La soluzione è determinata, nella realtà, dal fatto che non esiste a rigore un fluido perfetto, e la viscosità di un fluido reale per quanto magari piccola e trascurabile in altre regioni del dominio, nei pressi dell'ostacolo e unitamente alle caratteristiche di questo gioca un ruolo chiave nel determinare le caratteristiche del flusso intorno al corpo. Questa viscosità comporta la formazione di un sottile strato di fluido (strato limite - boundary layer) attorno al corpo, e una scia (wake) dietro il corpo, le cui proprietà "decidono" la soluzione — in generale con separazione e turbolenza, ma in alcuni casi di forme semplici dell'ostacolo, approssimabili a flusso potenziale al di fuori delle regioni di strato limite e scia.

Piccole oscillazioni di corpo immerso

Consideriamo un corpo immerso nel fluido, e supponiamo che compia un moto oscillatorio di ampiezza a piccola, ovvero $a \ll l$ diametro del corpo. Possiamo mostrare come il flusso si riesco a trattare come potenziale facendo una stima sugli ordini di grandezza dei vari termini nell'eq. del moto, ovvero l'eq. di Eulero

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v}\cdot \text{grad})\bar{v} = -\text{grad}(\psi + u) \qquad (\text{suppongo } \psi \text{ potenziale} / \ \text{grad}\,\psi = \frac{1}{\rho}\text{grad}\,p)$$

La variazione di $\bar{v}$ è dell'ordine di $\bar{u}$, velocità del corpo oscillante, su distanze dell'ordine di l

$$\Rightarrow \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \sim u/l$$

e la grandezza stessa di $\bar{v}$ presso il corpo è determinata da $\bar{u}$

$$\Rightarrow (\bar{v}\cdot\text{grad})\bar{v} \sim u^2/l$$

Data la frequenza di oscillazione ω, $\omega = u/a$

$$\Rightarrow \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \sim \omega u \sim u^2/a$$

$\Rightarrow$ in Eulero il I membro ha due termini $\sim \frac{u^2}{a} + \sim \frac{u^2}{l}$ con $a \ll l$

e $\Rightarrow$ il termine $\bar{v}\cdot\text{grad}\,\bar{v}$ è trascurabile; approssimiamo perciò Eulero come

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\text{grad}(\psi + u) \qquad \text{e applicando il rotore ad ambo i membri}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\text{rot}\,\bar{v} = -\text{rot}\left[\text{grad}(\psi + u)\right] = \phi \quad \text{identicamente}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\text{rot}\,\bar{v}) = \phi \ , \quad \text{e rot}\,\bar{v} = \text{costante} \ ;$$

poiché in un moto oscillatorio la velocità media è nulla, la costante qui sopra è ϕ, cioè $\underline{\text{rot}\,\bar{v} = \phi}$ e vediamo che vale un'approssimazione di moto irrotazionale.

Forza di resistenza nel flusso potenziale oltre un corpo

Vogliamo ragionare sul problema del flusso potenziale di un fluido perfetto e incomprimibile oltre un corpo solido - che è anche equivalente al moto indotto nel fluido, altrimenti fermo, dal corpo che si muove in esso: basta cambiare sdr. Consideriamo questo secondo caso, di corpo in moto. In tal caso la condizione al contorno (b.c., boundary condition) all'∞ per il problema di Laplace

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

è che $\bar{v}(r \to \infty) = 0$, fluido a riposo ($\Rightarrow$ $\mathrm{grad}\,\varphi = 0$)

Dunque all'∞ abbiamo soluzioni con φ uniforme, diciamo pure nullo.

Se prendiamo l'origine a un certo istante dentro il corpo, le soluzioni per φ dell'eq. di Laplace contemplano $\frac{1}{r}$ (con r = distanza dall'origine) nonché il $\mathrm{grad}\left(\frac{1}{r}\right)$ e le derivate spaziali di ordine superiore di $1/r$; tutte queste e le loro combinazioni lineari vanno a zero a $r \to +\infty$ $\Rightarrow$ la soluzione a grande distanza ha forma

$$\varphi = -\frac{a}{r} + \bar{A} \cdot \mathrm{grad}\,\frac{1}{r} + (\text{derivate superiori}) \qquad \text{con } \bar{A} \text{ vettore costante}$$

Tuttavia la soluzione $\varphi = -a/r$ dà $\bar{v} = -\mathrm{grad}(a/r) = a\bar{r}/r^3$

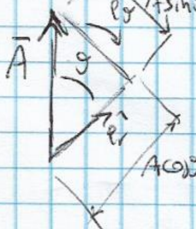
e se consideriamo il flusso di massa attraverso una superficie sferica concentrica di raggio R, su cui v ha valore costante a/R^2,

il flusso totale è non nullo: $\rho \cdot \frac{a}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi \rho a \neq 0$

che è impossibile perché la superficie è chiusa e il fluido incomprimibile. $\Rightarrow a = 0$, e

$$\varphi = \bar{A} \cdot \mathrm{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = -\bar{A} \cdot \hat{e}_r / r^2$$

$$\Rightarrow \bar{v} = \mathrm{grad}\,\varphi = \mathrm{grad}\left(-\bar{A} \cdot \frac{\hat{e}_r}{r^2}\right) = \mathrm{grad}\left(-\frac{A\cos\vartheta}{r^2}\right) = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{A\cos\vartheta}{r^2}\right) + \frac{\hat{e}_\vartheta}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\frac{A\cos\vartheta}{r^2}\right) =$$



$$= \frac{2A\cos\vartheta}{r^3}\hat{e}_r + \frac{A\sin\vartheta}{r^3}\hat{e}_\vartheta = \frac{3A\cos\vartheta}{r^3}\hat{e}_r - \frac{1}{r^3}\underbrace{\left(A\cos\vartheta\,\hat{e}_r - A\sin\vartheta\,\hat{e}_\vartheta\right)}_{\bar{A}}$$

$$\Rightarrow \bar{v} = \frac{3(\bar{A} \cdot \hat{e}_r)\hat{e}_r - \bar{A}}{r^3}$$

Il vettore $\bar{A}$ si determina conoscendo la specifica geometria e velocità del corpo, ovvero, in termini matematici, imponendo le b.c. sulla superficie solida del corpo stesso, che impongono v_n velocità normale al corpo del fluido = velocità normale del corpo stesso, e risolvendo del tutto (in tutto lo spazio) l'eq. di Laplace.

Esempio: sfera in moto con velocità $\bar{u}$, raggio R.

La b.c. sul corpo è $\bar{v}(R)\cdot\hat{e}_r = \bar{u}\cdot\hat{e}_r$

$$\bar{v}(R)\cdot\hat{e}_r = v_r(R) = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_R = -\bar{A}\cdot\hat{e}_r \left.\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\right)\right|_R = \bar{A}\cdot\hat{e}_r\,\frac{2}{R^3} = \bar{u}\cdot\hat{e}_r$$

$$\Rightarrow \bar{A} = \frac{1}{2}R^3\bar{u}$$

$$\text{e}\quad \bar{v} = \frac{R^3}{2r^3}\left[3(\bar{u}\cdot\hat{e}_r)\hat{e}_r - \bar{u}\right]$$

Fisicamente $\bar{A}$ ha un legame con grandezze concrete quali energia* e quantità di moto del fluido nel moto oltre il corpo. Integrando su tutto il volume fuori dal corpo, l'energia cinetica totale è

$$E_k = \int \rho v^2 dV$$

Preso un volume V finito, centrato sul sdr e di raggio R, integriamo su questo (poi si può $R\to\infty$):

$$\int_V v^2 dV = \int_V u^2 dV + \int_V (\bar{v}+\bar{u})\cdot(\bar{v}-\bar{u})\,dV = \quad \text{con } \bar{u} \text{ velocità del corpo,}$$

$$= u^2(V-V_0) + \int_V (\bar{v}+\bar{u})\cdot(\bar{v}-\bar{u})\,dV \quad V_0 \text{ volume del corpo di superficie } S_0$$

Con $\bar{v}+\bar{u} = \text{grad}(\varphi+\bar{u}\cdot\bar{r})$, e poiché $\text{div}\,\bar{v}=\emptyset$, $\text{div}\,\bar{u}=\emptyset$,

$$\int_V v^2 dV = u^2(V-V_0) + \int_V \text{grad}(\varphi+\bar{u}\cdot\bar{r})\cdot(\bar{v}-\bar{u})\,dV =$$

$$= u^2(V-V_0) + \int_V \text{div}\left[\underbrace{(\varphi+\bar{u}\cdot\bar{r})(\bar{v}-\bar{u})}\right]dV \quad \Rightarrow$$

$$= \text{grad}(\varphi+\bar{u}\cdot\bar{r}) + (\varphi+\bar{u}\cdot\bar{r})\,\underbrace{\text{div}(\bar{v}-\bar{u})}_{\emptyset}$$

---

* = poiché nel fluido incomprimibile ε = costante, ci occupiamo della sola parte cinetica

$$\int_V v^2 dV = u^2(V-V_0) + \int_{S+S_0} (\varphi + \bar{u}\cdot\bar{r})(\bar{v}-\bar{u})\cdot d\bar{S}$$

dove si è passati all'integrale di flusso attraverso la superficie che delimita il fluido in V (sup. sferica S + sup. del corpo S_0)

Ma sulla superficie del corpo $v_n = u_n \Rightarrow$

la parte di integrale su S_0 è nulla. Per la parte su S, che possiamo ora allargare ($R \to \infty$), abbiamo le espressioni di φ e $\bar{v}$

$$\varphi = -\bar{A}\cdot\hat{e}_r/r^2, \qquad \bar{v} = [3(\bar{A}\cdot\hat{e}_r)\hat{e}_r - \bar{A}]/r^3,$$

$$\int_V v^2 dV = u^2(V-V_0) + \int_S \left[-\frac{\bar{A}\cdot\hat{e}_r}{R^2} + \bar{u}\cdot R\hat{e}_r\right]\left[\frac{3(\bar{A}\cdot\hat{e}_r)\hat{e}_r - \bar{A}}{R^3} - \bar{u}\right]\cdot \underbrace{R^2 d\Omega\,\hat{e}_r}_{} =$$

$d\bar{S} = R^2 d\Omega\,\hat{e}_r$ con $d\Omega$ elemento di angolo solido

Trascuriamo i termini che $\to \phi$ per $R \to \infty \Rightarrow$

$$= u^2(V-V_0) + \int_{S_\infty} \left[(\bar{A}\cdot\hat{e}_r)\bar{u} + 3(\bar{A}\cdot\hat{e}_r)(\bar{u}\cdot\hat{e}_r)\hat{e}_r - \bar{A}(\bar{u}\cdot\hat{e}_r) - R^3(\bar{u}\cdot\hat{e}_r)\bar{u}\right]\cdot\hat{e}_r\, d\Omega =$$

$$= u^2(V-V_0) + \int_{S_\infty} \left[3(\bar{A}\cdot\hat{e}_r)(\bar{u}\cdot\hat{e}_r) - (\bar{u}\cdot\hat{e}_r)(\bar{u}\cdot\hat{e}_r)R^3\right] d\Omega$$

$V = \frac{4\pi}{3}R^3$

L'integrazione sull'angolo solido si può vedere come una media dell'integranda su tutte le direzioni prese dal versore $\hat{e}_r$, moltiplicata per 4π. La media di un'espressione $(\bar{A}\cdot\hat{e}_r)(\bar{B}\cdot\hat{e}_r) = A_i e_{r_i} B_k e_{r_k}$, con $\bar{A}, \bar{B}$ vettori costanti, è

$$\langle(\bar{A}\cdot\hat{e}_r)(\bar{B}\cdot\hat{e}_r)\rangle = A_i B_k \langle e_{r_i} e_{r_k}\rangle = \frac{1}{3}\delta_{ik}A_iB_k = \frac{1}{3}A_iB_i = \frac{1}{3}\bar{A}\cdot\bar{B}$$

si può dimostrare $\langle e_{r_i} e_{r_k}\rangle = \frac{1}{3}\delta_{ik}$

$$\Rightarrow \int_{V_\infty} v^2 dV = \frac{4\pi}{3}R^3u^2 - V_0u^2 + 4\pi\cdot\frac{1}{3}3(\bar{A}\cdot\bar{u}) - 4\pi\cdot\frac{1}{3}R^3u^2 = 4\pi(\bar{A}\cdot\bar{u}) - V_0u^2$$

$$\Rightarrow E_K = \frac{1}{2}\rho\int_{V_\infty} v^2 dV = \frac{1}{2}\rho\left(4\pi(\bar{A}\cdot\bar{u}) - V_0u^2\right)$$

Come già detto, $\bar{A}$ si determina solo risolvendo del tutto $\nabla^2\varphi = \phi$ + b.c., ma se ne può dire certo qualcosa osservando che l'eq. di Laplace è lineare in φ, con b.c. lineari sia rispetto a φ che a $\bar{u}$. Da ciò si arguisce che $\bar{A}$ deve essere a sua volta funzione lineare di $\bar{u}$. Ne consegue che $E_K \sim \bar{A}\cdot\bar{u} + u^2$ è funzione quadratica delle componenti di $\bar{u}$ e si può scrivere nella forma

$$\underline{E_K = \frac{1}{2} m_{ik} u_i u_k}$$ con m_{ik} TENSORE DI MASSA INDOTTA tensore simmetrico di componenti ricavabili una volta noto $\bar{A}$

e una volta nota E_K possiamo ottenere la quantità di moto totale $\bar{P}$ del fluido, data la relazione $dE_K = \bar{u}\cdot d\bar{P}$ * (valida solo per il fluido perfetto incomprimibile, perché il lavoro è tutto trasformato in E_K mentre l'energia interna è costante); si ha quindi

$$\underline{P_i = m_{ik} u_k}$$

e poiché $E_K = \frac{1}{2}\rho\left(4\pi \bar{A}\cdot\bar{u} - V_0 u^2\right) \Rightarrow \underline{\bar{P} = 4\pi\rho\bar{A} - \rho V_0 \bar{u}}$

La quantità di moto impartita al fluido per unità di tempo è $d\bar{P}/dt$; essa è uguale e opposta alla forza $\underline{\bar{F} \text{ di reazione}}$ del fluido, cioè forza trasmessa al corpo:

$$\bar{F} = -\frac{d\bar{P}}{dt}$$ scomponibile in

$\bar{F}_{\parallel} = (\bar{F}\cdot\bar{u}/u)\bar{u}/u$ forza di resistenza (drag) lungo la velocità del corpo

$\bar{F}_{\perp} = \bar{F} - (\bar{F}\cdot\bar{u}/u)\bar{u}/u$ portanza (lift)

= = =

Nota: se si avesse un flusso potenziale oltre un corpo in moto uniforme (vel. $\bar{u}$ = costante) nel fluido ideale, da $\bar{u}$ = costante $\Rightarrow \bar{P}$ = costante avremmo $\bar{F} = \emptyset$, cioè forze perfettamente bilanciate, il che contraddice ogni osservazione e buonsenso. Questo è detto paradosso di d'Alembert. Del resto una forza di resistenza impone che per mantenere il moto si compia lavoro dall'esterno, trasformandolo in en. cinetica o dissipazione nel fluido, con un continuo flusso di energia verso il fluido all'infinito. Ma per definizione nel fluido perfetto non c'è dissipazione, e la velocità del fluido causata dal corpo in moto va a zero a grande distanza, perciò non

---

* = Applichiamo una $\bar{F}^{ext}$ forza esterna sul corpo; su di esso agisce anche la $\bar{F}$ di reazione del fluido, = e opposta alla forza trasmessa dal corpo al fluido che è $d\bar{P}/dt$; $\Rightarrow$ per il corpo $\bar{F}^{ext} - d\bar{P}/dt = M\dot{\bar{u}}$; moltiplicando scalarmente per $\bar{u}dt$, $dL = \bar{F}^{ext}\cdot\bar{u}dt = M\dot{\bar{u}}\cdot\bar{u}dt + \bar{u}\cdot d\bar{P} = dE_{corpo} + \bar{u}d\bar{P}$

dL è l'unico lavoro sul sistema; per fluido perfetto incomprimibile $dL = dE_{corpo} + dE_{fluido}$;

$$\Rightarrow dE_{fluido} = \bar{u}\cdot d\bar{P}$$

ci può essere flusso di energia verso infinito.

Di nuovo, va notato che l'approssimazione di flusso potenziale può essere accettabile, ma non in tutto il volume; l'esistenza di uno strato limite viscoso causa forti gradienti di velocità nei pressi del corpo, generazione di vorticità e dissipazione viscosa di energia, con separazione del flusso (come suggerito da Prandtl per risolvere il paradosso di d'Alembert).

Ancora, Landau osserva che i ragionamenti sono stati fatti, e hanno validità, per fluidi di estensione infinita; per converso, se il corpo si muove lungo una sup. libera del fluido, si formano onde che propagano sulla superficie e portano energia verso infinito, con il risultato di creare una forza sul corpo, la resistenza d'onda*.

Sono così formalmente definite le quantità necessarie a scrivere e risolvere le equazioni del moto per un corpo immerso.

- Si consideri per esempio un corpo che compie un moto oscillatorio, sotto l'azione di una $\bar{F}_{ext}$, entro un fluido perfetto in approssimazione di moto potenziale. La forza imprime una variazione di quantità di moto al corpo e, a cascata, al fluido $\Rightarrow$

$$\underbrace{M\frac{d\bar{u}}{dt}}_{\text{corpo}} + \underbrace{\frac{d\bar{P}}{dt}}_{\text{fluido}} = \bar{F}_{ext} \quad , \text{ con } P_i = m_{ik} u_k ,$$

$$M\frac{du_i}{dt} + m_{ik}\frac{du_k}{dt} = f_i \quad \text{ovvero} \quad \boxed{\frac{du_k}{dt}\left(M\delta_{ik} + m_{ik}\right) = F_i} \quad \text{eq. del moto}$$

- Il problema speculare è quello del fluido in moto oscillatorio sotto azione esterna, con un conseguente trascinamento del corpo. Ragioniamo sempre col fluido perfetto e incomprimibile e con un corpo piccolo rispetto alla scala spaziale di variazione di velocità nel fluido, di volume V_0. Se sostituiamo al corpo lo stesso volume di fluido V_0, la velocità del fluido imperturbato in tale volume è detta $\bar{v}$; la quantità di moto di questo volume di fluido è $\rho V_0 \bar{v}$ e vi agisce una forza $\rho V_0 \, d\bar{v}/dt$. Poiché il corpo non è trascinato solidalmente ma acquista una sua velocità $\bar{u}$, c'è un moto relativo e una quantità di moto data

---

* = papere e cetacei nuotano sott'acqua, così che ci sia molta meno scia e dissipazione di energia (e cioè meno fatica per muoversi).

al fluido $m_{ik}(u_k - v_k)$, ovvero forza impartita al fluido $m_{ik}\frac{d}{dt}(u_k - v_k)$; sul corpo vi è la forza di reazione uguale e opposta, dunque la forza totale sul corpo, uguagliata alla sua variazione di impulso si scrive

$$\rho V_0 \frac{dv_i}{dt} - m_{ik}\frac{d}{dt}(u_k - v_k) = \frac{d}{dt}(M u_i)$$

e integrando

$$(M\delta_{ik} + m_{ik})\, u_k = (m_{ik} + \rho V_0 \delta_{ik})\, v_k + \text{costante}$$

La costante è nulla perché $\bar{u} = \phi$ se $\bar{v} = \phi$. L'equazione dà la velocità $\bar{u}$ del corpo, nota la $\bar{v}$ del fluido. Si osservi che ovviamente se il corpo ha la stessa densità del fluido, $M = \rho V_0$ e $\Rightarrow$ $\bar{u} = \bar{v}$.

⊛ Riprendiamo, per esemplificare, il caso della sfera che si muove con velocità $\bar{u}$ in un fluido che è a riposo all'infinito (a grande distanza). In un sistema di riferimento sferico centrato istantaneamente nel centro della sfera, abbiamo visto che il campo di velocità $\bar{v}$ del fluido è

$$\bar{v} = \frac{R^3}{2r^3}\left[3(\bar{u}\cdot\hat{e}_r)\hat{e}_r - \bar{u}\right] \qquad \text{cioè} \quad \bar{A} = \frac{R^3}{2}\bar{u}$$

Dunque l'impulso totale $\bar{P}$ trasmesso al fluido è

$$\bar{P} = 4\pi\rho\bar{A} - \rho V_0 \bar{u} = 2\pi\rho R^3 \bar{u} - \rho\frac{4\pi}{3}R^3\bar{u} = \frac{2\pi}{3}\rho R^3 \bar{u}$$

e poiché $P_i = m_{ik} u_k$ abbiamo che il tensore di massa indotta è

$$m_{ik} = \frac{2\pi}{3}\rho R^3 \delta_{ik}$$

e la forza di resistenza esercitata dal fluido sul corpo è $\bar{F} = -\frac{d\bar{P}}{dt} = -\frac{2\pi}{3}\rho R^3 \frac{d\bar{u}}{dt}$

dunque l'eq. del moto $\frac{du_k}{dt}(M\delta_{ik} + m_{ik}) = f_i$ (con $\bar{f}$ forza che agisce sul corpo e lo mantiene in moto e $M = \frac{4\pi}{3}\rho_0 R^3$, data ρ_0 = densità della sfera) diventa

$$\underbrace{\frac{4\pi}{3}R^3\left(\rho_0 + \frac{1}{2}\rho\right)}_{m}\frac{d\bar{u}}{dt} = \bar{f}$$

; m = "massa efficace" in cui oltre a M si deve tenere conto dell'effetto di inerzia del fluido

⊛ Considerando, al solito, il problema speculare in cui è il fluido a muoversi, l'eq. generale trovata $(M\delta_{ik} + m_{ik})u_k = (m_{ik} + \rho V_0 \delta_{ik})v_k$ diventa $\rightarrow \frac{4\pi}{3}R^3(\rho_0 + \rho/2)\bar{u} = \frac{4\pi}{3}R^3(\rho/2 + \rho)\bar{v}$

ovvero $\boxed{\bar{u} = \frac{3\rho}{2\rho_0 + \rho}\bar{v}}$. Pensiamo per es. a un moto oscillatorio (per cui l'approx di flusso potenziale è ok): per $\rho_0 = \rho$ il moto è solidale $(\bar{u} = \bar{v})$, per $\rho_0 \gtrless \rho$ la sfera "ritarda"/"anticipa" il fluido.