'A supposedly fun thing with tensors' - elementi di calcolo vettoriale e tensoriale

Rivediamo qui concetti già noti (scalari, vettori) poi estendendo la discussione ai tensori, ridefinendo questi oggetti sulla base di loro proprietà ben precise, ovvero le loro LEGGI DI TRASFORMAZIONE.

- Il riferimento bibliografico sono i primi due capitoli di "Mathematics Applied to Continuum Mechanics", Lee A. Segel (Dover Publications, Inc. 1987)

Ci limitiamo a una trattazione entro sistemi di riferimento cartesiani, da cui il nome di vettori (e tensori) cartesiani.

* Uno scalare è definito puramente dalla sua "grandezza", un numero reale.
* Un vettore è definito dalla grandezza (modulo) e dalla direzione.

Ma detto altrimenti,

un VETTORE (POLARE) è una quantità le cui componenti cambiano similmente alle componenti di un vettore posizione per rotazione degli assi coordinati.

Detti $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ gli assi del sdr originario, per rotazione si giunge a un sdr di assi $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3$.

Il vettore $\vec{x}$ ha coordinate x_i $(i=1,2,3)$ $\longrightarrow$ x'_i nel sistema ruotato.

Chiamato l_{ij} = coseno dell'angolo tra $\hat{e}_i$ e $\hat{e}'_j$ (asse i del sdr originario / asse j del sdr ruotato)

[notare la convenzione è che il secondo indice è quello del sdr primato]

la legge di trasformazione è

$$x'_j = x_1 l_{1j} + x_2 l_{2j} + x_3 l_{3j} = \sum_{i=1}^{3} x_i l_{ij} \, ,$$

o, usando la convenzione di somma,

$$\boxed{x'_j = x_i l_{ij}}$$

e ne deriva la trasformazione inversa $x_i = x'_j l_{ij}$

Convenzione di somma: ~~per~~ un indice ripetuto in un termine di un'espressione va considerata sottintesa la somma su tutti i valori che può assumere tale indice (anche detto saturato).

[Attenzione: un indice non va mai ripetuto più di due volte in un singolo termine.]

Nota: si veda che $l_{ij}\, l_{kj} = \delta_{ik}$ (e similmente $l_{ji}\, l_{jk} = \delta_{ik}$),

avendo qui introdotto il simbolo detto <u>delta di Kronecker</u> $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i\neq j \end{cases}$

La relazione è valida considerando che

$$x_j' = \sum_{i=1}^{3} x_i\, l_{ij} = \sum_{i=1}^{3} x_i \cos(\hat{e}_i, \hat{e}_j')$$

Considero la trasf. inversa $x_i = \sum_{j=1}^{3} x_j' \cos(\hat{e}_j', \hat{e}_i)$

e vi inserisco l'espressione di x_j' $\Rightarrow$ non posso ripetere indici impunemente, quindi scrivo

$$x_i = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} x_k \cos(\hat{e}_k, \hat{e}_j') \cos(\hat{e}_j', \hat{e}_i) =$$

$$= \sum_{k=1}^{3} x_k \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{3} \cos(\hat{e}_k, \hat{e}_j') \cos(\hat{e}_j', \hat{e}_i) \right)}$$

che è la proiezione del vettore unitario diretto lungo $\hat{e}_i$ sulla direzione di $\hat{e}_k$ $\Rightarrow$ $=1$ se $i=k$, $=0$ se $i\neq k$

ma $l_{kj} = \cos(\hat{e}_k, \hat{e}_j')$

$l_{ij} = \cos(\hat{e}_j', \hat{e}_i)$ $\Rightarrow$ in convenzione di somma $l_{ij}\, l_{kj} = \delta_{ik}$

È utile notare che $l_{ji} = l_{ij}^T$ elemento della trasposta; ma

$l_{ji}\, l_{jk} = \delta_{ik}$

$\Rightarrow \underbrace{l_{ij}^T\, l_{jk}} = \delta_{ik}$

$\hookrightarrow$ in notazione standard $\sum_{j=1}^{3} l_{ij}^T\, l_{jk} = A_{ik}$ è una matrice prodotto; se $A_{ik} = \delta_{ik}$

$\underline{\underline{A}} = \mathbb{1}$ matrice identità, $\Rightarrow$ $\underline{\underline{l}}^T \underline{\underline{l}} = \mathbb{1}$ che significa $\underline{\underline{l}}^T = \underline{\underline{l}}^{-1}$, la trasposta coincide con l'inversa.

Del resto il lettore ricorderà da precedenti frequentazioni con la geometria che la rotazione è una matrice di TRASFORMAZIONE ORTOGONALE; tali matrici, che descrivono trasformazioni in $\mathbb{R}^n$ che sono anche ISOMETRIE (= conservano il prodotto scalare dello spazio, cioè angoli e lunghezze, cioè la METRICA) sono matrici $\underline{\underline{R}}$ tali che

$\underline{\underline{R}}^T = \underline{\underline{R}}^{-1}$ e $\Rightarrow$ $\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{R}}^T = \underline{\underline{R}}^T\underline{\underline{R}} = \mathbb{1}$ e $\det \underline{\underline{R}} = \pm 1$.

In particolare $\quad \det \underline{\underline{R}} = 1 \quad \rightarrow$ rotazione PROPRIA (manda terna destrorsa in terna destrorsa)

$\det \underline{\underline{R}} = -1 \quad \rightarrow$ rotazione IMPROPRIA

(c'è riflessione di almeno un asse, per es.

$$\underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} -1 & \phi & \phi \\ \phi & -1 & \phi \\ \phi & \phi & -1 \end{pmatrix}$$ manda $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ in $\{-\hat{e}_1, -\hat{e}_2, -\hat{e}_3\}$)

Ci torneremo tra poco.

Vettori spostamento - velocità - accelerazione

Se nel primo sdr x_k denota la posizione di un pt in movimento, sarà funzione del tempo: $x_k = f_k(t)$; in un altro sdr avremo $x'_j = g_j(t)$. Perciò

$$x'_j = \ell_{kj} x_k = \ell_{kj} f_k(t) = g_j(t)$$

La velocità si esprime come

$$v_k = \dot{f}_k(t) = \frac{df_k(t)}{dt} \quad ; \quad v'_j = \dot{g}_j(t) = \frac{dg_j(t)}{dt}$$

$$v'_j = \frac{d}{dt} x'_j = \frac{d}{dt}(\ell_{kj} x_k) \underset{\substack{\uparrow \\ \ell_{kj} \text{ costante}}}{=} \ell_{kj} \frac{dx_k}{dt} = \ell_{kj} v_k$$

La legge di trasformazione delle velocità è $\Rightarrow \boxed{v'_j = \ell_{kj} v_k}$

e quella inversa, moltiplicando per ℓ_{ij} e sommando,

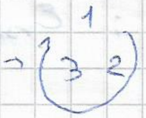
$$\ell_{ij} v'_j = \ell_{ij} \ell_{kj} v_k = \delta_{ik} v_k = v_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_i = \ell_{ij} v'_j}$$

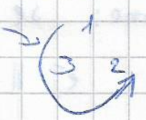
Le velocità si trasformano come le posizioni $\Rightarrow$ sono VETTORI anch'esse.

Derivando ancora si trova lo stesso risultato per l'accelerazione.

Simbolo di Levi-Civita (o di permutazione)

$$\text{Viene definito } \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{per permutazioni pari di } 123 \\ -1 & \text{per " dispari di } 123 \\ 0 & \text{per almeno 2 indici} = \end{cases}$$





È uno strumento comodo in molte situazioni. Nel seguito si ripercorrono vari teoremi e proprietà con la numerazione del Segel.* Non dimostriamo tutto esplicitamente.

* Detta $\underline{\underline{A}}$ matrice 3x3, $\det \underline{\underline{A}} = \varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$

Teorema 1: $\det \underline{\underline{A}} = \varepsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3}$

(Si verificano avendo la pazienza di scrivere tutti i termini e poi ragionando sulla parità complessiva delle permutazioni)

Teorema 2: Se $\underline{\underline{B}}$ ottenuta da $\underline{\underline{A}}$ per scambio di due righe o colonne, $\det \underline{\underline{B}} = -\det \underline{\underline{A}}$.

" 3: Se $\underline{\underline{A}}$ ha 2 righe o colonne uguali, $\det \underline{\underline{A}} = 0$

(perché posso avere $\underline{\underline{A}}'$ in cui le scambio, e quindi $\det \underline{\underline{A}}' \nearrow = -\det \underline{\underline{A}}$, $\searrow = \det \underline{\underline{A}}$ $\Rightarrow 0$)

Teorema 4: Se B è ottenuta da $\underline{\underline{A}}$ moltiplicandone una riga o colonna per $c \in \mathbb{R}$, $\det \underline{\underline{B}} = c \det \underline{\underline{A}}$.

Def.: il minore M_{ij} di A_{ij} è il determinante della matrice ottenuta da $\underline{\underline{A}}$ per eliminazione di riga i e colonna j. Il cofattore C_{ij} è definito $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Teorema 6: $\det \underline{\underline{A}} = \sum_{j=1}^{3} A_{ij} C_{ij} = \sum_{i=1}^{3} A_{ij} C_{ij}$ (non usando la conv. di somma)

Teorema 7: $A_{pj} C_{ij} = \det \underline{\underline{A}} \cdot \delta_{pi}$

$A_{ip} C_{ij} = \det \underline{\underline{A}} \cdot \delta_{pj}$

Teorema 8 (regola di Cramer): dato il sistema lineare $A_{ij} x_j = b_i$ si ha

$$\det \underline{\underline{A}}\, x_k = b_i C_{ik}$$

(infatti moltiplicando per C_{ik}: $\underbrace{C_{ik} A_{ij}}_{\det \underline{\underline{A}} \cdot \delta_{kj}} x_j = b_i C_{ik} \Rightarrow \det \underline{\underline{A}}\, \delta_{kj} x_j = \det \underline{\underline{A}}\, x_k = b_i C_{ik}$)

---

*: qui si parla di Cap. 1

Teorema 9 : $\varepsilon_{rst} \det \underline{\underline{A}} = \varepsilon_{ijk} A_{ir} A_{js} A_{kt} = \varepsilon_{ijk} A_{ri} A_{sj} A_{tk}$

Dimostrazione: se due tra r, s, t sono uguali, il primo membro è nullo e il secondo è il det di una matrice con due righe o colonne uguali, $\Rightarrow$ anche nullo.

Per $(rst) = (123)$

$$\underbrace{\varepsilon_{123}}_{1} \det \underline{\underline{A}} = \underbrace{\varepsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3}}_{\text{definizione di } \det \underline{\underline{A}}} \Rightarrow \text{valido.}$$

Per permutazioni pari di (rst), si ha la matrice con pari permutazioni di riga/colonne, $\Rightarrow$ il secondo membro, come determinante resta uguale, e $\varepsilon_{rst} = 1$, al primo membro.

Per permutazioni dispari, allo stesso modo cambia il segno di entrambi i membri.

Corollario: $\det(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) = \det \underline{\underline{A}} \cdot \det \underline{\underline{B}}$

Teorema 10 :

$$\begin{vmatrix} A_{ip} & A_{iq} & A_{ir} \\ A_{jp} & A_{jq} & A_{jr} \\ A_{kp} & A_{kq} & A_{kr} \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} \det \underline{\underline{A}}$$

Dimostrazione: se 2 indici di (ijk) o (pqr) sono $=$, è tutto nullo.

Se $(ijk) = (123)$

$$\begin{vmatrix} A_{1p} & A_{1q} & A_{1r} \\ A_{2p} & A_{2q} & A_{2r} \\ A_{3p} & A_{3q} & A_{3r} \end{vmatrix} = 1 \cdot \varepsilon_{pqr} \det \underline{\underline{A}}$$

e per $(pqr) = (123)$ o permutazioni pari, si ha $\det \underline{\underline{A}} = 1 \cdot \det \underline{\underline{A}}$;

per $(pqr) =$ permutazioni dispari di (123), il primo membro ha uno scambio dispari di colonne e al secondo membro $\varepsilon_{pqr} = -1$, $\Rightarrow$ concordano nuovamente; segue.

Lo stesso avviene per permutazioni di (ijk).

Teorema 11 : $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$

Dimostrazione: usiamo il Teorema 10 con $r = k$ e $A_{ij} = \delta_{ij}$ (matrice identità)

cioè scriviamo

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{pqr}\ \det \underset{=}{\overset{1}{I}} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} =$$ espandendo il determinante dalla terza riga

$$= \underbrace{\delta_{kp}}_{=1 \text{ per } k=p} \begin{vmatrix} \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jq} & \delta_{jr} \end{vmatrix} - \underbrace{\delta_{kq}}_{=1 \text{ per } k=q} \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jr} \end{vmatrix} + \underbrace{\delta_{kk}}_{\text{att.: si somma, }=3} \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} \delta_{iq} & \delta_{ip} \\ \delta_{jq} & \delta_{jp} \end{vmatrix}}_{} - \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} \end{vmatrix} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$$

$$\hookrightarrow = - \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{jq} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} \end{vmatrix}$$ con scambio di colonne

Nota: per permutazioni cicliche (pari) si può anche scrivere

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{pqk} = \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{kpq} = \varepsilon_{kij}\,\varepsilon_{kpq} = \varepsilon_{jki}\,\varepsilon_{qkp} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$$

ε_{ijk} è molto comodo per scrivere operazioni e operatori che coinvolgono un prodotto vettore. Infatti dati $\bar{a}, \bar{b}$ vettori, il prodotto vettore è

$\bar{a} \times \bar{b} = \varepsilon_{ijk}\,\hat{e}_i\,a_j\,b_k$ altrimenti scritto per componenti: $(\bar{a}\times\bar{b})_i = \varepsilon_{ijk}\,a_j\,b_k$

Ancora, $[\bar{a} \cdot (\bar{b}\times\bar{c})]_i = a_i \cdot (\bar{b}\times\bar{c})_i = \varepsilon_{ijk}\,a_i\,b_j\,c_k$

Si esprime comodamente il rotore:

(Con la convenzione $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$) $\quad (\text{rot}\,\bar{a})_i = \varepsilon_{ijk}\,\partial_j a_k = \varepsilon_{ijk}\,\frac{\partial a_k}{\partial x_j}$

Infatti, in notazione standard

$$(\text{rot}\,\bar{a})_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\,\partial_j a_k = \cancel{\varepsilon_{i11}\partial_1} a_1 + \cancel{\varepsilon_{i12}\partial_1} a_2 + \cancel{\varepsilon_{i13}\partial_1} a_3 +$$
$$+ \cancel{\varepsilon_{i21}\partial_2} a_1 + \cancel{\varepsilon_{i22}}\partial_2 a_2 + \varepsilon_{i23}\partial_2 a_3 +$$
$$+ \cancel{\varepsilon_{i31}\partial_3} a_1 + \varepsilon_{i32}\partial_3 a_2 + \cancel{\varepsilon_{i33}\partial_3} a_3 =$$

supponendo $i=1$ ed eliminando gli ε con indici $=$

$$= \varepsilon_{123}\,\partial_2 a_3 + \underset{\nwarrow -1}{\varepsilon_{132}}\,\partial_3 a_2 = \frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}$$

Scrivendo il gradiente come $\partial_j a_i$ e la divergenza come $\partial_i a_i$ possiamo anche verificare che $[\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\bar{a})] = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\bar{a}) - \nabla^2 \bar{a}$

Componente i: $[\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\bar{a})]_i = \varepsilon_{ijl}\,\partial_j(\mathrm{rot}\,\bar{a})_l = \varepsilon_{ijl}\,\partial_j(\varepsilon_{lhk}\,\partial_h a_k) =$

$$= \varepsilon_{ijl}\,\varepsilon_{lhk}\,\partial_j\partial_h a_k = \varepsilon_{ijl}\,\varepsilon_{hkl}\,\partial_j\partial_h a_k = (\delta_{ih}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jh})\,\partial_j\partial_h a_k =$$

permut. ciclica di ε_{lhk}

$$= \delta_{ih}\delta_{jk}\,\partial_j\partial_h a_k - \delta_{ik}\delta_{jh}\,\partial_j\partial_h a_k =$$

$$= \partial_j\partial_i a_j - \partial_j\partial_j a_i = \partial_i\partial_j a_j - \partial_j\partial_j a_i = [\mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\bar{a})]_i - [\nabla^2\bar{a}]_i$$

Dal Teorema 9 $\varepsilon_{rst}\det\underline{\underline{A}} = \varepsilon_{ijk}A_{ir}A_{js}A_{kt}$ si ottiene una utile proprietà:

$$\varepsilon_{pjk}A_{js}A_{kt} = (\det\underline{\underline{A}})\,A^{-1}_{rp}\,\varepsilon_{rst}$$

Dimostrazione: $(\det A)\,A^{-1}_{rp}\,\varepsilon_{rst} = \varepsilon_{ijk}\underbrace{A_{ir}A^{-1}_{rp}}_{\delta_{ip}}A_{js}A_{kt} = \varepsilon_{ijk}\,\delta_{ip}\,A_{js}A_{kt} = \varepsilon_{pjk}A_{js}A_{kt}$

δ_{ip} (elemento di $\mathbb{1}$ identità)

Si noti che se $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{l}}$ matrice ortogonale (trasformazione di coordinate)

$$\varepsilon_{rst}\det\underline{\underline{l}} = \varepsilon_{ijk}\,l_{ir}l_{js}l_{kt}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{rst} = (\det\underline{\underline{l}})^{-1}\varepsilon_{ijk}\,l_{ir}l_{js}l_{kt} \quad \text{ma } (\det\underline{\underline{l}})^{-1} = \det\underline{\underline{l}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_{rst} = (\det\underline{\underline{l}})\,\varepsilon_{ijk}\,l_{ir}l_{js}l_{kt}}$$

dà la legge di trasformazione per ε_{ijk}; assomiglia a quella di un vettore, ma c'è il determinante $(\det\underline{\underline{l}})$ della matrice di trasformazione; vediamo tra poco che è la legge per uno pseudotensore, così come abbiamo la legge per lo pseudovettore che differisce da quella del vettore polare proprio per un termine $(\det\underline{\underline{l}})$ [che fa una differenza solo se $\det\underline{\underline{l}} = -1$, ovvero per rotazione impropria = c'è una riflessione].

Da questo risultato ricaviamo appunto la legge di trasformazione per un vettore importante, ovvero il prodotto vettore tra due vettori $\bar{a}, \bar{b}$ (polari).

$$(\bar{a}\times\bar{b})_i = \varepsilon_{ije}\, a_j b_e$$

$$(\bar{a}\times\bar{b})'_i = \varepsilon_{irs}\, a'_r b'_s = \varepsilon_{irs}\, l_{rp} a_p\, l_{sq} b_q = \det\underline{\underline{l}}\; l^{-1}_{in}\, \underbrace{\varepsilon_{npq}\, a_p b_q}_{(\bar{a}\times\bar{b})_n} =$$

$$\varepsilon_{irs}\, l_{rp}\, l_{sq} = (\det\underline{\underline{l}})\, l^{-1}_{in}\, \varepsilon_{npq}$$

$$l_{ki} = l^{-1}_{ik}$$

$$= (\det\underline{\underline{l}})\, l_{ki}\, (\bar{a}\times\bar{b})_k$$

$$\Rightarrow \boxed{(a\times b)'_i = (\det\underline{\underline{l}})\, l_{ki}\, (\bar{a}\times\bar{b})_k}$$

ma $v'_i = \det\underline{\underline{l}}\; l_{ji}\, v_j$ è la legge di trasformazione per uno PSEUDOVETTORE o VETTORE ASSIALE; si dimostra $\Rightarrow$ che il prodotto vettore di due vettori polari è un vettore assiale.

[Si può vedere che vett. pol. × vett. assiale → vett. polare;
vett. assiale × vett. assiale → vett. assiale]

Rivediamo quindi i concetti di vettore polare e assiale:

POLARE: le componenti sono trasformate nel loro opposto per inversione degli assi coordinati (riflessione) $\Rightarrow$ rimane tale e quale.

ASSIALE: le componenti sono invarianti per inversione degli assi coordinati $\Rightarrow$ si ribalta!

Esempio: supponiamo di avere un sdr e riflettere $\hat{e}_1$ in $-\hat{e}_1$; la matrice di trasformazione ortogonale $\underline{\underline{l}}$ è

$$\underline{\underline{l}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{infatti } \hat{e}'_1 = \underline{\underline{l}}\cdot \underset{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}{\hat{e}_1} = -\hat{e}_1;\ \hat{e}'_2 = \underline{\underline{l}}\cdot\hat{e}_2 = \hat{e}_2;\ \hat{e}'_3 = \underline{\underline{l}}\cdot\hat{e}_3 = \hat{e}_3$$

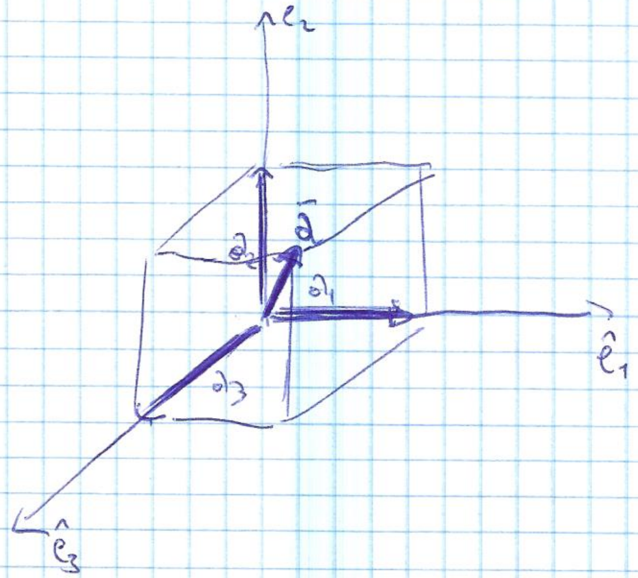
Se $\bar{a}$ è vettore polare $a_i' = l_{ji} a_j = \ldots\ l_{i1} a_1 + l_{i2} a_2 + l_{i3} a_3$

$\Rightarrow i=1 \quad a_1' = l_{11} a_1 + l_{12} a_2 + l_{13} a_3 = l_{11} a_1 = -a_1$

$i=2 \quad a_2' = \qquad = l_{22} a_2 = a_2$

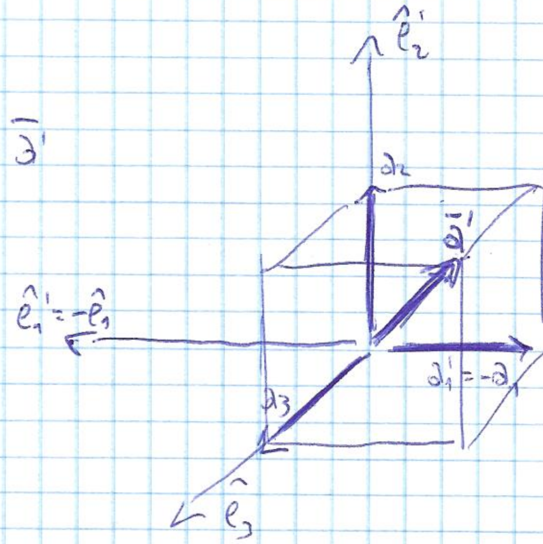
$i=3 \quad a_3' = \qquad = l_{33} a_3 = a_3$

sdr



$\bar{a} = \bar{a}'$

sdr'



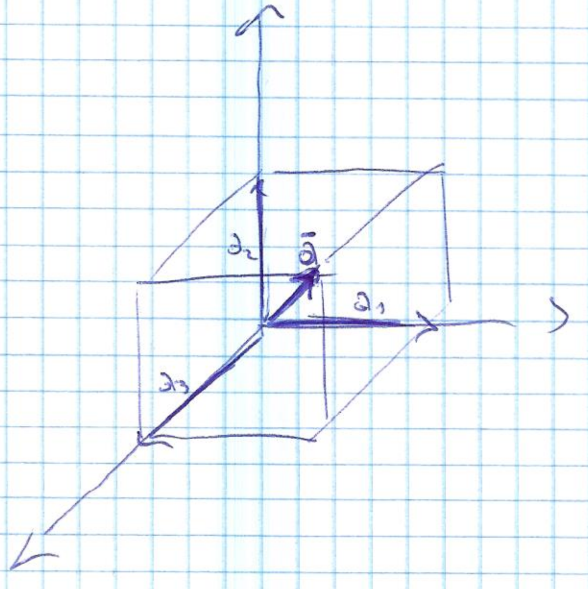
Se $\bar{a}$ vettore assiale, $a_i' = \det \underline{l}\ l_{ij} a_j$ ma $\det \underline{l} = -1$

$\Rightarrow a_1' = -1 \cdot l_{11} a_1 = a_1$

$a_2' = -1 \cdot l_{22} a_2 = -a_2$

$a_3' = -1 \cdot l_{33} a_3 = -a_3$

sdr



$\bar{a}' = -\bar{a}$

sdr'