Tensori cartesiani

[La numerazione dei Teoremi segue il cap. 2 del Segel.]

Definizione: un tensore di <u>ordine</u> o <u>rango</u> n $\underline{\underline{T}}$, con $n = 0, 1, 2, \dots$ è un oggetto tale che

- in $\forall$ sdr cartesiano si può associare a $\underline{\underline{T}}$ un insieme di 3^n quantità $T_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ dette componenti di $\underline{\underline{T}}$;
- se $T_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ e $T_{j_1, j_2, \dots, j_n}$ sono le componenti di $\underline{\underline{T}}$ in due diversi sdr cartesiani $\Rightarrow$

$$T_{i_1, \dots, i_n} = l_{i_1 j_1} \dots l_{i_n j_n} T'_{j_1, \dots, j_n}$$ legge di trasformazione, con $\underline{\underline{l}}$ trasformazione ortogonale

Es.: per rango 2 $\quad T_{pq} = l_{pm} l_{qn} T'_{mn}$

per rango 3 $\quad T_{pqr} = l_{pm} l_{qn} l_{rk} T'_{mnk}$

per rango 4 $\quad T_{pqrs} = l_{pm} l_{qn} l_{rk} l_{sh} T'_{mnkh}$ $\quad$ ecc.

Convenzione: $[\underline{\underline{T}}]_{ij} = T_{ij}$ ij-esima componente di $\underline{\underline{T}}$ in un certo sdr

Tensori notevoli: δ_{ij} di rango 2

ε_{ijk} di rango 3 – per la precisione <u>pseudotensore</u>

Speciali sono i tensori <u>isotropi</u>;

ISOTROPO è un tensore che ha le stesse componenti $\forall$ rotazione del sdr.

I tensori di rango ϕ = SCALARI sono tutti isotropi.

$\nexists$ tensori di rango 1 = VETTORI isotropi (se non banali, vettore nullo)

Tensori di rango 2 isotropi: solo δ_{ij} e suoi multipli $\alpha\delta_{ij}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si dimostra che è isotropo:

$$\delta'_{ij} = l_{mi} l_{nj} \delta_{mn} = l_{mi} l_{mj} = l^{-1}_{im} l_{mj} = \delta_{ij}$$

si può dimostrare che è l'unico (cfr. Appendice 1)

Tensori di rango 3 isotropi: solo ε_{ijk} (e suoi multipli $\alpha\,\varepsilon_{ijk}$, $\alpha \in \mathbb{R}$).

Lo spazio dei tensori di un certo rango ha la struttura di uno spazio vettoriale dotato delle classiche operazioni geometriche, che devono valere in $\forall$ sdr.

Per esempio prendiamo i tensori di rango 2, detti anche <u>tensori doppi</u>; valgono

$(\alpha \underline{\underline{T}})_{ij} = \alpha T_{ij}$ (prodotto per scalare)

$(\underline{\underline{T}} + \underline{\underline{U}})_{ij} = T_{ij} + U_{ij}$ (somma) , $(\underline{\underline{T}} - \underline{\underline{U}})_{ij} = T_{ij} - U_{ij}$ (sottrazione)

$\underline{\underline{T}} + (-\underline{\underline{T}}) = \underline{\underline{\emptyset}}$ esistenza dell'opposto

∃ lo zero, ovvero tensore $\underline{\underline{\phi}}$ $(\phi)_{ij} = \emptyset$ (tutte le componenti sono nulle ∀ sdr)

insomma è uno spazio lineare e $(\alpha \underline{\underline{T}} + \beta \underline{\underline{U}})_{ij} = \alpha T_{ij} + \beta U_{ij}$

Si definisce CONTRAZIONE di un tensore di rango $n \geq 2$ il porre due indici uguali ed eseguire la somma (saturazione) su questi. <u>La contrazione abbassa il rango da n a $n-2$.</u>

Possiamo dimostrarne un caso, $n=4$.

Teorema 4 : dato $\underline{\underline{T}}$ tensore di rango 4 di componenti T_{ijmn}, ponendo $m=j$ e definendo $U_{in} \doteq T_{ijjn} \Rightarrow U_{in}$ è un tensore di rango 2.

Dim.: $T_{ijmn} = l_{ip} l_{jq} l_{mr} l_{ns} T'_{pqrs}$; ponendo $m=j$

$$T_{ijjn} = l_{ip} \underbrace{l_{jq} l_{jr}} l_{ns} T'_{pqrs} = l_{ip} l_{ns} \delta_{qr} T'_{pqrs} = l_{ip} l_{ns} T'_{prrs}$$

$$l_{jq} l_{jr} = l^{-1}_{qj} l_{jr} = \delta_{qr}$$

$$U_{in} = l_{ip} l_{ns} U'_{ps}$$

che è proprio la legge di trasformazione di un tensore doppio.*

<u>Prodotto tensoriale</u> (o <u>esterno</u>)

Dati i tensori $\underline{\underline{A}}$ di rango n, di componenti $[\underline{\underline{A}}]_{i_1,\dots,i_n} = A_{i_1,\dots,i_n}$

e $\underline{\underline{B}}$ di rango m, di componenti $[\underline{\underline{B}}]_{j_1,\dots,j_m} = B_{j_1,\dots,j_m}$

si definisce il prodotto tensoriale $\underline{\underline{A}} \otimes \underline{\underline{B}}$ di componenti $A_{i_1,\dots,i_n} B_{j_1,\dots,j_m}$

che è un tensore di rango $n+m$ (⇐ Teorema 5).

Per esempio partendo da vettori (tensori di rango 1) $\bar{v}, \bar{w}$

$(\bar{v} \otimes \bar{w})_{ij} = v_i w_j$ di rango 2 ovvero

$$\bar{v} \otimes \bar{w} = \begin{pmatrix} v_1 w_1 & v_1 w_2 & v_1 w_3 \\ v_2 w_1 & v_2 w_2 & v_2 w_3 \\ v_3 w_1 & v_3 w_2 & v_3 w_3 \end{pmatrix}$$

---

* Nota: la legge per tensori doppi, trasf. sotto gruppo ortogonale $O(3)$ si può anche scrivere $\underline{\underline{T}}' = \underline{\underline{l}}\, \underline{\underline{T}}\, \underline{\underline{l}}^{-1}$, infatti

$T_{ij} = l_{ih} l_{jk} T'_{hk} = l_{ih} T'_{hk} l^T_{kj} = l_{ih} T'_{hk} l^{-1}_{kj} = (\underline{\underline{l}}\, \underline{\underline{T}}'\, \underline{\underline{l}}^{-1})_{ij}$ cioè $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{l}}\, \underline{\underline{T}}'\, \underline{\underline{l}}^{-1}$

Oppure con $\bar{v}$ vettore e $\underline{\underline{T}}$ tensore doppio $(\bar{v} \otimes \underline{\underline{T}})_{ijh} = v_i T_{jh}$ $\Rightarrow$ rango 3 ecc.

Nota: il fatto che $\bar{v} \otimes \bar{w}$ sia un tensore implica che $(\bar{v} \otimes \bar{w})_{ij} = v_i w_j$ sia una relazione valida $\forall$ sdr, e lo si verifica:

$$(\bar{v} \otimes \bar{w})'_{ij} = l_{ih} l_{jk} (\bar{v} \otimes \bar{w})_{hk} = l_{ih} l_{jk} v'_h w'_k = l_{ih} v'_h l_{jk} w'_k = v_i w_j$$

Nota: $v_i w_j$ prodotto tensoriale dà un tensore T_{ij}; non è vero però che $\forall \underline{\underline{T}}$ sia ottenibile come prodotto tensore $\bar{v} \otimes \bar{w}$ di due vettori.

Invece possiamo prendere la base canonica $\hat{e}_1 = (1, \emptyset, \emptyset)$, $\hat{e}_2 = (\emptyset, 1, \emptyset)$, $\hat{e}_3 (\emptyset, \emptyset, 1)$ e da questi creare una base per cui costruire un $\underline{\underline{T}}$ come combinazione lineare degli elementi della base. Il generico elemento della base è $\hat{e}_i \otimes \hat{e}_j$ ($\Rightarrow$ 9 elementi/tensori doppi)

per esempio

$$\hat{e}_1 \otimes \hat{e}_2 = \begin{pmatrix} \emptyset & 1 & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix} \quad ; \quad \Rightarrow \underline{\underline{T}} = \sum_{i,j=1}^{3} c_{ij} (\hat{e}_i \otimes \hat{e}_j)$$

$$\text{e } T_{ij} = c_{ij}$$

Teorema fondamentale del calcolo tensoriale o regola del quoziente (Teorema 7)

Detti $\underline{\underline{v}}, \underline{\underline{w}}$ tensori rispettivamente di rango n e m, se $\exists$ un oggetto $\underline{\underline{T}}$ tale che

$$\underline{\underline{v}} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{w}} \ *$$

e tale relazione è valida $\forall$ sdr, $\Rightarrow$ $\underline{\underline{T}}$ è un tensore di rango $n+m$.

In particolare se $\bar{v}$ e $\bar{w}$ sono vettori e $\forall$ sdr vale $v_i = T_{ij} w_j$ $\Rightarrow$ T_{ij} ha rango 2.

Dim.: valgono $v'_i = T'_{ij} w'_j$; $v_i = T_{ij} w_j$

La legge di trasformazione dei vettori dice $v'_i = l_{ki} v_k$; $w'_j = l_{hj} w_h$

$$\Rightarrow \quad v'_i = T'_{ij} w'_j$$

$$l_{ki} v_i = T'_{ij} l_{hj} w_h \quad \text{e moltiplichiamo per } l_{ip}^{-1} \text{ ambo i membri}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{l_{ki} l_{ip}^{-1}}_{\delta_{kp}} v_k = T'_{ij} l_{ip}^{-1} l_{hj} w_h$$

$$\delta_{kp} v_k = v_p = T'_{ij} l_{pi} l_{hj} w_h \longrightarrow v_p = T_{ph} w_h \longrightarrow$$

---

* Nota: si definisce $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$ l'operazione PRODOTTO CONTRATTO (o interno). Come si contraggono gli indici di un tensore lo si può fare nel prodotto tra due così definito: $[\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}]_{iq} = A_{ij} B_{jq}$. Si può fare con tensori di rango arbitrario e $\neq$ tra i due, sempre sommando su indici adiacenti.

$T_{ph}\, w_h = T'_{ij}\, l_{pi}\, l_{hj}\, w_h$ valido per w_h arbitrario

$\Rightarrow \boxed{T_{ph} = T'_{ij}\, l_{pi}\, l_{hj}}$ che è la legge di trasformazione dei tensori doppi

Prodotto scalare

Lo spazio dei tensori è dotato anche di un prodotto scalare, che è bilineare e commutativo (e cioè un vero prodotto scalare); il prodotto scalare tra $T_{i_1,\dots,i_n}$ e $U_{i_1,\dots,i_n}$ è

$$T_{i_1,\dots,i_n}\, U_{i_1,\dots,i_n}$$

(per rango 2: $T_{ij} U_{ij}$); per rango 1 $t_i u_i$ come già noto).

Decomposizione di tensore di rango 2

Si dice SIMMETRICO un tensore $\underline{\underline{S}}$ / $\underline{\underline{S}}^T = \underline{\underline{S}}$ (ovvero $S_{ij} = S_{ji}$).

Si dice ANTISIMMETRICO (o emisimmetrico / skew tensor) un tensore $\underline{\underline{A}}$ / $\underline{\underline{A}}^T = -\underline{\underline{A}}$ (ovvero $A_{ij} = -A_{ji}$).

Un tensore simmetrico ha solo 6 componenti diverse, al più, => lo spazio dei tensori simmetrici ha dimensione 6.

Un tensore antisimmetrico ha solo 3 componenti diverse, al più, => lo spazio dei tensori antisimmetrici ha dimensione 3.

$$\begin{pmatrix} \emptyset & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & \emptyset & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & \emptyset \end{pmatrix}$$

Il prodotto scalare di un tensore simmetrico e un tensore antisimmetrico è nullo, per come sono fatti: $S_{ij} A_{ij} = \emptyset$; i due sottospazi, dei tensori simmetrici e antisimmetrici, sono ORTOGONALI e la loro somma diretta dà l'intero spazio dei tensori doppi.

⊛ Un fatto di estrema importanza: è sempre possibile decomporre un tensore doppio $\underline{\underline{T}}$ nella somma

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{S}} + \underline{\underline{A}} \quad \text{(simm. + antisimm.)}$$

Infatti:

$$T_{ij} = \frac{1}{2}T_{ij} + \frac{1}{2}T_{ij} + \frac{1}{2}T_{ji} - \frac{1}{2}T_{ji} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) = S_{ij} + A_{ij}$$

e $S_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji})$ è simmetrico (scambiando i e j si ottiene lo stesso valore => il trasposto è =, $S_{ji} = S_{ij}$)

$A_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$ è antisimmetrico (scambiando i e j $\to \frac{1}{2}(T_{ji} - T_{ij}) = -\left[\frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})\right]$ => trasposto = − tensore originario, $A_{ji} = -A_{ij}$)

⊛ Il sottospazio dei tensori doppi simmetrici è a sua volta la somma di due sottospazi propri* fra loro ortogonali e invarianti:

⊕ $\underline{\underline{S}}^{TN}$ simmetrici a traccia nulla, $Tr(\underline{\underline{S}}^{TN}) = S^{TN}_{ii} = \emptyset$ (dimensione 5)

⊕ $\underline{\underline{I}}$ simmetrici isotropi e => proporzionali a δ_{ij} ovvero l'identità:

$$\underline{\underline{I}} = \alpha \underline{\underline{\mathbb{1}}} = \alpha \delta_{ij} \quad \text{(dimensione 1)}$$

---

* Nota: sottospazio proprio = non coincide con lo spazio nullo o tutto lo spazio

Come si effettua questa decomposizione? Si sottrae a $\underline{\underline{S}}$ una matrice identità moltiplicata per il valore della traccia per $\frac{1}{3}$: $\frac{1}{3} S_{\ell\ell}\,\delta_{ij} = \frac{1}{3} Tr(\underline{\underline{S}})\, \underline{\underline{\mathbb{1}}}$ ††

$$\Rightarrow \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}} - \frac{1}{3} Tr(\underline{\underline{S}})\,\mathbb{1} + \frac{1}{3} Tr(\underline{\underline{S}})\,\mathbb{1}$$

ovvero

$$S_{ij} = \underbrace{S_{ij} - \frac{1}{3} S_{\ell\ell}\,\delta_{ij}}_{S_{ij}^{TN}} + \underbrace{\frac{1}{3} S_{\ell\ell}\,\delta_{ij}}_{I_{ij}} = S_{ij}^{TN} + I_{ij}$$

- Nel complesso si può dunque decomporre $\underline{\underline{T}}$ in 3 parti: $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{S}}^{TN} + \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{I}}$

$\underline{\underline{S}}^{TN}$ simmetrico a traccia nulla + $\underline{\underline{A}}$ ** antisimmetrico + $\underline{\underline{I}}$ simmetrico isotropo

Decomponiamo la parte simmetrica di T_{ij}, cioè $\frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji})$:

$$\frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) = \frac{1}{2}\left[T_{ij} + T_{ji} + \frac{1}{3}(T_{\ell\ell} + T_{\ell\ell})\delta_{ij} - \frac{1}{3}(T_{\ell\ell} + T_{\ell\ell})\delta_{ij} \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ji} - \frac{2}{3} T_{\ell\ell}\delta_{ij} \right) + \frac{1}{3} T_{\ell\ell}\delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{ij} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ji} - \frac{2}{3} T_{\ell\ell}\delta_{ij} \right)}_{S_{ij}^{TN}} + \underbrace{\frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})}_{A_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{3} T_{\ell\ell}\delta_{ij}}_{I_{ij}}}$$

Oss.:
- Le tre componenti, in una trasformazione di sdr, si trasformano indipendentemente, perciò se una componente è nulla in un sdr, lo è in $\forall$ sdr.
- Si può dimostrare che la decomposizione è UNICA.
- Combinazioni lineari di tensori di tipo $\underline{\underline{S}}^{TN}$ (o $\underline{\underline{A}}$, o $\underline{\underline{I}}$) danno tensori di tipo $\underline{\underline{S}}^{TN}$ (o $\underline{\underline{A}}$, o $\underline{\underline{I}}$).

---

†† Nota: è immediato vedere che la traccia di $\frac{1}{3} Tr(\underline{\underline{S}})\,\mathbb{1}$ è $= Tr(\underline{\underline{S}})$, $\Rightarrow$ si sottrae appunto quanto voluto.

** Nota: la traccia è invariante. Infatti se $T_{ij} = \ell_{im}\ell_{jn} T'_{mn}$,

$$T_{ii} = \ell_{im}\ell_{in} T'_{mn} = \ell^{-1}_{mi}\ell_{in} T'_{mn} = \delta_{mn} T'_{mn} = T'_{mm}$$

Problema agli autovalori − assi principali

Parliamo di tensori doppi. Ci si può chiedere il tensore è <u>diagonale</u>, ovvero $T_{ij} = \phi \ \forall i \neq j$? [Per noi è di interesse se pensiamo al tensore degli sforzi: ci stiamo chiedendo se c'è una direzione / sdr per cui vediamo solo sforzi <u>normali</u>.]

Ciò si può porre nei termini: dato $\underline{\underline{T}}$, esistono $\bar{v}$ tali che

$$\bar{v} \cdot \underline{\underline{T}} = \lambda \bar{v} \ ?$$

È già apparente che si tratta di un problema agli autovalori. Riscrivendo

$$v_i T_{ij} = \lambda v_j \rightarrow v_i T_{ij} = \lambda v_i \delta_{ij} \rightarrow v_i (T_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = \phi$$

che è un set di 3 equazioni per le 3 incognite v_i, le <u>equazioni agli autovalori</u>.

I 3 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ sono gli <u>autovalori</u> (distinti o meno) relativi ai 3 <u>autovettori</u> v_i che sono linearmente indipendenti.

Perché la soluzione $v_i (T_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = \phi$ abbia soluzione non banale ($v_i = \phi$), il determinante della matrice $(T_{ij} - \lambda \delta_{ij})$ si deve annullare:

$$\begin{vmatrix} T_{11}-\lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22}-\lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33}-\lambda \end{vmatrix} = \phi \quad \text{cioè} \quad -\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3 = \phi$$

(eq. caratteristica)

con $I_1 = T_{ii} = Tr(T_{ij})$

$$I_2 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \det(T_{ij})$$

Particolare importanza ha il caso di $\underline{\underline{T}}$ doppi <u>SIMMETRICI</u>*. In tal caso anche $\underline{\underline{T}} \cdot \bar{w} = \lambda \bar{w}$ dà luogo alle stesse equazioni da cui si ricavano le componenti degli autovettori, e ⇒ gli autovettori "sinistri" o "destri" di $\underline{\underline{T}}$ coincidono. Inoltre a $\underline{\underline{T}}$ reale (cioè $T_{ij} \in \mathbb{R} \ \forall i,j$) corrispondono autovalori reali, <u>tutti distinti</u>.

Il sistema di riferimento in cui $\underline{\underline{T}}$ è diagonale è detto <u>SISTEMA DEGLI ASSI PRINCIPALI</u>.

In tale sdr, usando gli autovettori ortogonali $\bar{v}^{(i)}$ per ricavare una base di $\hat{e}_i$ del sdr, si ha

$$\underline{\underline{T}} \doteq \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & \phi & \phi \\ \phi & \lambda^{(2)} & \phi \\ \phi & \phi & \lambda^{(3)} \end{pmatrix}$$

* Nota: di qui in avanti consideriamo solo $\underline{\underline{T}}$ doppi simmetrici.

Campi tensoriali

Come un campo scalare (o vettoriale) è una funzione che associa uno scalare (o vettore) a ogni pt dello spazio così un campo tensoriale associa un tensore a ogni pt dello spazio.

La legge di trasformazione, per esempio, va indicata per il pt:

$T'_{ij}(P) = l_{ih}\, l_{jk}\, T_{hk}(P)$

ovvero $\quad T'_{ij}(x'(P)) = l_{ih}\, l_{jk}\, T_{hk}(x(P))$

I concetti di limite, continuità e derivata sono del tutto analoghi a quelli già noti per campi scalari / vettoriali.

Possiamo quindi definire div, grad, rot di $\underline{\underline{T}}$; per tensori doppi (ma di facile estensione)

grad $\underline{\underline{T}}$ è: $\left[\text{grad}\, \underline{\underline{T}}\right]_{pij} = \partial_p T_{ij}$ $\quad (= T_{ij,p}$ "Comma notation": $,p = \partial_p)$

div $\underline{\underline{T}}$: $\left[\text{div}\, \underline{\underline{T}}\right]_j = \partial_i T_{ij}$ $\quad (= T_{ij,i})$

rot $\underline{\underline{T}}$: $\left[\text{rot}\, \underline{\underline{T}}\right]_{iq} = \varepsilon_{ijp}\, \partial_j T_{pq}$ $\quad (= \varepsilon_{ijp}\, T_{pq,j})$

⊕ Se $\underline{\underline{T}}$ ha rango m, grad $\underline{\underline{T}}$ ha rango $m+1$.

Dim. per rango $m=2$: si deve dimostrare la legge di trasformazione

$$\left[\text{grad}\, \underline{\underline{T}}\right]'_{kmn} = l_{pk}\, l_{im}\, l_{jn} \left[\text{grad}\, \underline{\underline{T}}\right]_{pij}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_k} T'_{mn}(\bar{x}') = l_{pk}\, l_{im}\, l_{jn} \left[\frac{\partial}{\partial x_p} T_{ij}(\bar{x})\right]_{\bar{x} = \bar{x}(\bar{x}')}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_k} T'_{mn}(\bar{x}') = l_{im}\, l_{jn} \frac{\partial}{\partial x'_k} T_{ij}(\bar{x}(\bar{x}'))$$

per regola di derivazione a catena

$$\frac{\partial}{\partial x'_k} T_{ij}(\bar{x}(\bar{x}')) = \left.\frac{\partial}{\partial x_p} T_{ij}(\bar{x})\right|_{\bar{x} = \bar{x}(\bar{x}')} \frac{\partial x_p}{\partial x'_k} = l_{pk} \frac{\partial}{\partial x_p} T_{ij}(\bar{x})$$

$$\frac{\partial x_p}{\partial x'_k} \to l_{pk} \qquad \left(x_p = l_{pk}\, x'_k \Rightarrow \frac{\partial x_p}{\partial x'_k} = l_{pk}\right)$$

⊕ La divergenza di campo tensoriale di rango m è campo tensoriale di rango $m-1$.

es) per campo vettoriale $\text{div}(\bar{v})$ = scalare:

$$\partial'_h v'_h(\bar{x}') = \partial'_h\, l_{ih}\, v_i(\bar{x}) = l_{ph}\, \partial_p\, l_{ih}\, v_i(\bar{x}) = l_{ph}\, l^{-1}_{hi}\, \partial_p v_i(\bar{x}) = \delta_{pi}\, \partial_p v_i(\bar{x}) = \partial_i v_i(\bar{x})$$

cioè $\quad \partial'_h v'_h(\bar{x}) = \partial_i v_i(\bar{x})$ legge di trasformazione per scalare

Relazioni di dualità

Si può mostrare che un $\forall$ tensore doppio antisimmetrico $\underline{\underline{A}}$ si può esprimere in termini di un vettore $\bar{\omega}$ (vettore duale):

$$A_{ij} = \varepsilon_{ijk}\,\omega_k \qquad \text{e a sua volta} \qquad \omega_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{klm}A_{lm}$$

Dim.: moltiplichiamo per ε_{ijk} ambo i membri di

$$\omega_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{klm}A_{lm}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{ijk}\,\omega_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}A_{lm} = \frac{1}{2}\left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right)A_{lm} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(A_{ij} - A_{ji}\right) \underset{\uparrow}{=} A_{ij} \quad \Rightarrow \quad A_{ij} = \varepsilon_{ijk}\,\omega_k$$

antisimm. $\Rightarrow A_{ji} = -A_{ij}$

Note: * $\bar{\omega}$ come vettore è una contrazione dei tensori $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{\varepsilon}}$

e viceversa $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{\varepsilon}}\cdot\bar{\omega}$ contrazione di $\underline{\underline{\varepsilon}}$, $\bar{\omega}$;

* $\bar{\omega}$ è per la precisione uno pseudovettore, in quanto prodotto contratto tra pseudotensore $\underline{\underline{\varepsilon}}$ e tensore $\underline{\underline{A}}$;

* date le componenti di $\bar{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, possiamo scrivere esplicitamente

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

* vediamo un'applicazione fisica. Se il vettore velocità $\bar{v}$ dei punti di un corpo soddisfa l'espressione $\bar{v} = \bar{x}\cdot\underline{\underline{\Omega}} = -\underline{\underline{\Omega}}\cdot\bar{x}$ per un certo tensore doppio antisimmetrico $\underline{\underline{\Omega}}$ indipendente da $\bar{x}$ vettore posizione,

$\Rightarrow$ il moto del corpo è una rotazione rigida attorno all'origine con velocità angolare $\bar{\omega}$ che è lo pseudovettore duale di $\underline{\underline{\Omega}}$, cioè $\omega_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\Omega_{jk}$.

Dim.: se $\bar{v} = \bar{x}\cdot\underline{\underline{\Omega}}$, in componenti

$$v_j = x_i\,\Omega_{ij} \underset{\uparrow}{=} x_i\,\varepsilon_{ijk}\,\omega_k = \varepsilon_{ijk}\,\omega_k\,x_i = \varepsilon_{kij}\,\omega_k\,x_i = (\bar{\omega}\times\bar{x})_j$$

con lo pseudovettore duale $\bar{\omega}$ | cioè $\bar{v} = \bar{\omega}\times\bar{x}$ che è la rotazione rigida richiesta.

Appendice 1 - Isotropia di δ_{ij} (unico tensore isotropo di rango 2)

Dato il generico tensore di rango 2 $\underline{\underline{T}}$, di componenti T_{ij} in un sdr $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$.
Imponiamo che sia isotropo (per definizione: le componenti sono le stesse per $\forall$ sdr) e proviamo a mostrare cosa succede se ruotiamo il sdr attorno a $\hat{e}_3$ di $\pi/2$, cioè

$$\hat{e}_1' = \hat{e}_2 \quad ; \quad \hat{e}_2' = -\hat{e}_1 \quad ; \quad \hat{e}_3' = \hat{e}_3$$

che è una trasformazione di matrice $\underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La trasformazione applicata a $\underline{\underline{T}}$ è

$$\underline{\underline{T}}' = \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{L}}^T \quad \text{cioè}$$

$$\begin{pmatrix} T_{11}' & T_{12}' & T_{13}' \\ T_{21}' & T_{22}' & T_{23}' \\ T_{31}' & T_{32}' & T_{33}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} T_{22} & -T_{21} & T_{23} \\ -T_{12} & T_{11} & -T_{13} \\ T_{32} & -T_{31} & T_{33} \end{pmatrix}$$

Se imponiamo l'isotropia, $T_{ij}' = T_{ij}$ $\Rightarrow \overbrace{T_{11} = T_{11}'}^{\text{def.}} \stackrel{\text{da calcolo}}{=} T_{22}$

$(\text{oppure } T_{22} = T_{22}' = T_{11})$

$T_{31} = T_{31}' = T_{32} = T_{32}' = -T_{31}$

$\Rightarrow T_{31} = -T_{31} \Leftrightarrow = 0$ e $T_{32} = -T_{32} = 0$

Con simile rotazione di $\pi/2$ intorno a $\hat{e}_2$,

$T_{11} = T_{33}$; $T_{12} = T_{32} = 0$; $T_{21} = T_{23} = 0$ cioè tutti i T_{ij} con $j \neq i$ sono 0 e
i T_{ii} = allo stesso valore $\alpha \Rightarrow$

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha \underline{\underline{\mathbb{1}}} \quad \text{scritto anche } T_{ij} = \alpha\delta_{ij}$$

il che mostra come δ_{ij} sia l'unico tensore di rango 2 a essere isotropo.

Appendice 2 $-$ $\det(\underline{\underline{1}} + \phi \underline{\underline{A}}) = 1 + \phi \, Tr(\underline{\underline{A}})$ per ϕ scalare ∞esimo

* Sappiamo che (Teor. 11 Cap. 1 Segel)

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$$

Saturiamo due indici: $j=q$ e somma

$$\Rightarrow \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pjk} = \delta_{ip}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{jp} = 3\delta_{ip} - \delta_{ip} = 2\delta_{ip}$$

Saturando ancora $(i=p)$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 2\delta_{ii} = 6$$

* Data $\underline{\underline{A}}$ 3×3, sappiamo che (Teor. 9 Cap. 1 Segel)

$$\varepsilon_{ijk} A_{ir} A_{js} A_{kt} = \varepsilon_{ijk} A_{ri} A_{sj} A_{tk} = \varepsilon_{rst} \det \underline{\underline{A}}$$

Moltiplicando ambo i membri per ε_{rst} e saturando su r, s, t

$$\varepsilon_{rst}\varepsilon_{ijk} A_{ir} A_{js} A_{kt} \left(= \varepsilon_{rst}\varepsilon_{ijk} A_{ri} A_{sj} A_{tk}\right) = \varepsilon_{rst}\varepsilon_{rst} \det \underline{\underline{A}} = 6 \det \underline{\underline{A}}$$

* Ora def. $\underline{\underline{B}} \doteq \underline{\underline{1}} + \phi \underline{\underline{A}}$ con ϕ infinitesimo scalare

Da quanto sopra,

$$\det(\underline{\underline{B}}) = \det(\underline{\underline{1}} + \phi\underline{\underline{A}}) = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijl}\varepsilon_{hkm} B_{ih} B_{jk} B_{lm} =$$

$$= \frac{1}{6}\varepsilon_{ijl}\varepsilon_{hkm}(\delta_{ih} + \phi A_{ih})(\delta_{jk} + \phi A_{jk})(\delta_{lm} + \phi A_{lm}) =$$

al I ordine in ϕ ∞esimo

$$= \frac{1}{6}\varepsilon_{ijl}\varepsilon_{hkm}\left[\delta_{ih}\delta_{jk}\delta_{lm} + \phi\left(\delta_{ih}\delta_{jk}A_{lm} + \delta_{ih}A_{jk}\delta_{lm} + A_{ih}\delta_{jk}\delta_{lm}\right)\right]$$

Ora $-$ $\varepsilon_{ijl}\varepsilon_{hkm}\delta_{ih}\delta_{jk}\delta_{lm} = \varepsilon_{ijl}\varepsilon_{ijl} = 6(\det \underline{\underline{1}}) = 6$

$-$ $\varepsilon_{ijl}\varepsilon_{hkm}\delta_{ih}\delta_{jk}A_{lm} = \varepsilon_{ijl}\varepsilon_{ijm}A_{lm} =$

$$= (\underbrace{\delta_{jj}}_{=3}\delta_{lm} - \underbrace{\delta_{jm}\delta_{lj}}_{\delta_{lm}})A_{lm} = (3\delta_{lm} - \delta_{lm})A_{lm} = 2\delta_{lm}A_{lm} = 2A_{ll} = 2\,Tr(\underline{\underline{A}})$$

e abbiamo 3 termini simili così

$$\Rightarrow \det(\underline{\underline{\mathbb{1}}} + \phi \underline{\underline{A}}) = \ldots = \frac{1}{6}\left[6 \det \mathbb{1} + \phi \cdot 3 \cdot 2 \,\mathrm{Tr}\, \underline{\underline{A}}\right] = 1 + \phi \,\mathrm{Tr}\, \underline{\underline{A}}$$

Nota: di qui si scopre poi (giustificando i passaggi al limite) che

$$\det(\exp \underline{\underline{A}}) = \exp(\mathrm{Tr}(\underline{\underline{A}})),$$

infatti

$$\det(\exp \underline{\underline{A}}) = \det\left[\lim_{n\to+\infty} \left(\mathbb{1} + \underline{\underline{A}}/n\right)^n\right] = \lim_{n\to+\infty} \det\left[\left(\mathbb{1} + \underline{\underline{A}}/n\right)^n\right] =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left[\det\left(\mathbb{1} + \underline{\underline{A}}/n\right)\right]^n = \lim_{n\to+\infty} \left[1 + (\mathrm{Tr}\, \underline{\underline{A}})/n\right]^n = \exp(\mathrm{Tr}\, \underline{\underline{A}})$$

$$\left(\lim_{n\to+\infty} (1 + a/n)^n = \exp(a)\right)$$