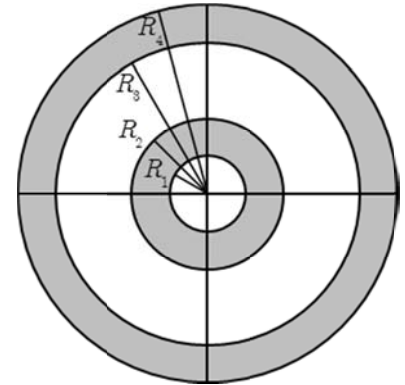


**Esame scritto del Corso di Elettromagnetismo del 12 settembre 2019**  
**Prof. G. Colò, F. Ragusa - a.a. 2018-2019**

**Attenzione: le risposte alle domande devono essere adeguatamente motivate con calcoli, enunciazione delle leggi usate e ragionamenti. L'elaborato deve essere redatto ordinatamente e con una calligrafia comprensibile.**

**Esercizio 1.** Considerare due sfere metalliche concentriche, di spessore finito, poste nel vuoto. La sfera più interna ha raggio interno  $R_1$  e raggio esterno  $R_2$ ; la sfera più esterna ha raggio interno  $R_3$  e raggio esterno  $R_4$ . Sulla sfera interna viene depositata una carica  $Q_1$ , sulla sfera esterna una carica  $Q_2$ .

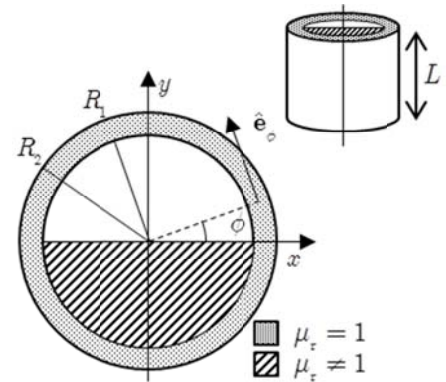


- Determinare la quantità di carica su ciascuna delle quattro superfici del sistema. Determinare la densità di carica su ciascuna superficie.
- Determinare l'espressione del campo elettrico in tutto lo spazio. Determinare la differenza di potenziale fra la sfera esterna e la sfera interna. Nel caso particolare  $Q_2 = -Q_1$  determinare la capacità del sistema

Lo spazio compreso fra le due sfere (compreso fra  $R_2$  e  $R_3$ ) viene adesso riempito con un materiale dielettrico lineare, omogeneo e isotropo di costante dielettrica relativa  $\epsilon_r$ .

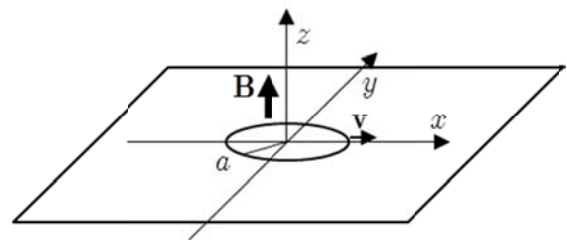
- Determinare la quantità di carica su ciascuna delle quattro superfici. Determinare la densità di carica di polarizzazione (di volume e di superficie) nel dielettrico.
- Determinare l'espressione del campo elettrico in tutto lo spazio. Determinare la differenza di potenziale fra la sfera esterna e la sfera interna. Discutere infine le discontinuità del campo elettrico  $\mathbf{E}$  sulle quattro superfici.
- Nel caso particolare  $Q_2 = -Q_1$  determinare la capacità del sistema.

**Esercizio 2.** Un solenoide rettilineo produce un campo magnetico grazie al passaggio di una densità volumica di corrente  $\mathbf{J} = J_0 \hat{e}_\phi$  entro un avvolgimento in rame (magneticamente trasparente,  $\mu_r = 1$ ) di raggio interno  $R_1$  e raggio esterno  $R_2$ . La lunghezza del solenoide  $L \gg R_2$  permette di trattarlo come indefinitamente esteso. L'interno del solenoide è longitudinalmente diviso in due metà semicilindriche, di cui una metà in vuoto e l'altra riempita da un materiale magnetico lineare, omogeneo e isotropo di permeabilità magnetica relativa  $\mu_r \neq 1$ .



- Determinare l'espressione vettoriale dei campi  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{M}$  in tutto lo spazio.
- Determinare l'espressione vettoriale delle densità di corrente di magnetizzazione. Discutere la chiusura delle linee di campo delle densità di corrente.
- Discutere le condizioni di raccordo di  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{B}$  sull'interfaccia piana tra materiale e vuoto.
- Determinare l'energia magnetica racchiusa all'interno del cilindro di raggio  $R_2$ .

**Esercizio 3.** Una spira circolare di materiale conduttore, di raggio  $a$ , si muove su un piano orizzontale senza attrito. La spira ha una resistenza  $R$  e una massa  $m$ . È presente un campo d'induzione magnetica  $\mathbf{B}$  perpendicolare al piano dato dalla seguente espressione  $\mathbf{B} = B_0 x / x_0 \hat{e}_z$ , dove  $x_0$  è un parametro noto. La spira passa per l'origine al tempo  $t = 0$  con velocità  $\mathbf{v} = v_0 \hat{e}_x$ . Assumere  $a \ll x_0$  in modo che il campo  $\mathbf{B}$  possa essere considerato uniforme sulla superficie della spira e trascurare l'autoinduttanza della spira.



- Determinare l'espressione del flusso del campo  $\mathbf{B}$  concatenato con la spira. Determinare inoltre la forza elettromotrice indotta in funzione della velocità della spira. Determinare infine l'espressione della corrente indotta e della potenza dissipata nella resistenza della spira.
- Discutere qualitativamente il moto della spira successivo al tempo  $t = 0$ . Utilizzando un bilancio di energia determinare l'equazione di evoluzione di  $v(t)$  e calcolarne la soluzione. Calcolare lo spazio percorso dalla spira prima di arrestarsi.
- Calcolare l'espressione del momento di dipolo della spira e della forza magnetica che si esercita su di essa (modulo, direzione e verso). Determinare infine l'equazione del moto della spira e confrontarla con il risultato della domanda precedente.

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right] \hat{e}_r + \left[ \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right] \hat{e}_\phi + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(rv_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right] \hat{e}_z$$