Prima prova *in itinere* del corso di Elettromagnetismo del 17/01/2022
Prof. G. Colò, Prof. X. Roca-Maza – Prof. F. Ragusa, Prof. G. Maero

Attenzione: indicare nome, cognome e matricola su tutte le pagine. Numerare le pagine. Lo svolgimento dell'elaborato deve essere commentato e le leggi ed eventuali principi di simmetria utilizzati devono essere chiaramente enunciati. L'elaborato deve essere svolto ordinatamente e con una grafia comprensibile. Non seguire queste indicazioni può comportare un giudizio negativo, al limite insufficiente, dell'elaborato.

Esercizio 1. Un condensatore piano, ideale, con armature di area $S = 20\ \mathrm{cm}^2$, e distanti $d_0 = 3$ mm, è collegato ad una batteria che fornisce una d.d.p. $V_0 = 100$ V.

a) Calcolare la capacità C_0 e determinare in queste condizioni l'energia U_0 immagazzinata nel condensatore e la carica presente sulle armature.

Scollegata la batteria, le armature vengono avvicinate fino a una distanza $d_1 = d_0/2$.

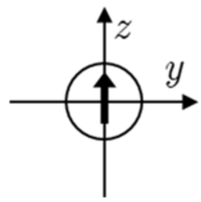
b) Determinare la nuova d.d.p. V_1 quando le armature vengono avvicinate.
c) Determinare anche l'energia U_1 immagazzinata nel condensatore dopo l'avvicinamento delle armature.
d) Ricavare l'espressione della forza che agisce sull'armatura superiore (a potenziale positivo) quando la distanza fra le armature è d_1, precisando modulo, direzione e verso.
e) Calcolare il lavoro necessario per portare le armature da d_1 alla distanza $d_2 = 2d_0$, precisando se si tratta di lavoro positivo o negativo dal punto di vista di un agente esterno.
f) Calcolare l'energia U_2 del condensatore quando la distanza fra le armature è d_2 e confrontarla con l'energia immagazzinata quando la distanza fra le armature era d_1. Commentare.

Si supponga ora di **ricollegare** la batteria che fornisce la d.d.p. V_0.

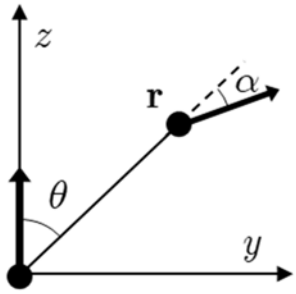
g) Si riportino, con la batteria collegata, le armature del condensatore prima dalla distanza d_2 alla distanza d_1, e successivamente da d_1 di nuovo alla distanza iniziale d_0. Calcolare le variazioni di energia $U_2 - U_1$ e $U_1 - U_0$ in questi due passaggi.

Per le domande a), b), c) calcolare anche i valori numerici delle quantità richieste.

Esercizio 2. Una sfera di dielettrico possiede una polarizzazione uniforme pari a P, diretta lungo un asse che si sceglie come asse z. Il centro della sfera coincide con l'origine del sistema di riferimento.



a) Si determini l'espressione delle cariche di polarizzazione di superficie e di volume. Determinare il momento di dipolo complessivo della sfera.
b) Si determinino i valori dei campi **E** e **D** nel centro della sfera (modulo, direzione e verso).
c) Considerare un vettore **r** che forma un angolo θ con l'asse z e che giace sul piano z-y. Scrivere l'espressione dei versori $\hat{\mathbf{e}}_r$ e $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ e rappresentarli graficamente.
d) Considerare adesso una seconda sfera identica alla prima posta nel punto **r**. Assumendo $r >> R$ le due sfere possono essere considerate due dipoli puntiformi. Si assuma che il secondo dipolo giaccia nel piano z-y e formi un angolo α con il vettore **r** (vedi figura). Scrivere le componenti del secondo dipolo rispetto ai versori del punto d).
e) Scrivere l'espressione dell'energia potenziale del secondo dipolo nel campo del primo. Considerando r e θ fissi, α variabile (il secondo dipolo può ruotare nel piano z-y), determinare l'angolo α_0 di equilibrio del secondo dipolo.



Si ricorda l'espressione del campo elettrico in coordinate sferiche di un dipolo p_0 puntiforme diretto lungo l'asse z

$$\mathbf{E}(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_0}{r^3}(2\,\hat{\mathbf{e}}_r\cos\theta + \hat{\mathbf{e}}_\theta\sin\theta)$$

Si ricordano inoltre le espressioni in coordinate cartesiane dei versori del sistema di coordinate sferiche.

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{e}}_r &= \sin\theta\cos\phi\hat{\mathbf{e}}_x + \sin\theta\sin\phi\hat{\mathbf{e}}_y + \cos\theta\hat{\mathbf{e}}_z \\
\hat{\mathbf{e}}_\theta &= \cos\theta\cos\phi\hat{\mathbf{e}}_x + \cos\theta\sin\phi\hat{\mathbf{e}}_y - \sin\theta\hat{\mathbf{e}}_z \\
\hat{\mathbf{e}}_\phi &= -\sin\phi\hat{\mathbf{e}}_x + \cos\phi\hat{\mathbf{e}}_y
\end{aligned}$$