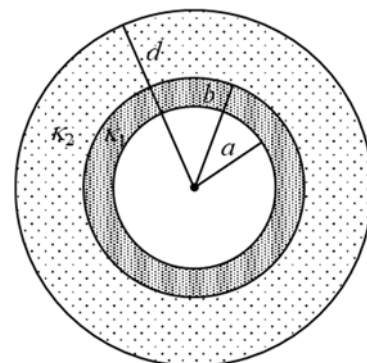


Esame scritto del Corso di Elettromagnetismo del 24 gennaio 2022
Prof. G. Colò, F. Ragusa – anno accademico 2020-2021

Attenzione: indicare nome, cognome e matricola su tutte le pagine. Numerare le pagine. Lo svolgimento dell'elaborato deve essere commentato e le leggi ed eventuali principi di simmetria utilizzati devono essere chiaramente enunciati. L'elaborato deve essere svolto ordinatamente e con una grafia comprensibile. Non seguire queste indicazioni può comportare un giudizio negativo, al limite insufficiente, dell'elaborato.

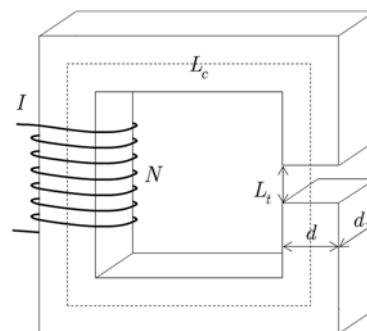


Esercizio 1. Un condensatore cilindrico di raggio interno $a = 5$ mm, raggio esterno $d = 25$ mm e altezza $L = 20$ mm è riempito da due dielettrici diversi. Il primo, non omogeneo, occupa la regione 1, con $r \in (a, b)$, con $b = 10$ mm, ha costante dielettrica relativa $\kappa_1(r) = \alpha/r^2$, dove $\alpha = 10^{-4} \text{ m}^2$. Il secondo, omogeneo, riempie la regione 2, con $r \in (b, d)$, e ha costante dielettrica relativa $\kappa_2 = 2$. Il condensatore è caricato con una carica $Q = 100$ pC, positiva sull'armatura interna. Trascurare gli effetti di bordo dovuti all'altezza finita del cilindro.

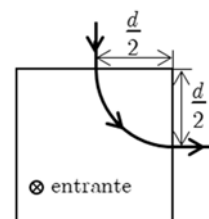
- Determinare l'espressione del campo elettrico nella regione 1 e calcolarne i valori in a e b . Determinare l'espressione del campo nella regione 2 e calcolarne i valori in b e d . Tracciare un grafico qualitativo del campo elettrico in funzione del raggio.
- Determinare la differenza di potenziale $V(a) - V(d)$ tra le armature e la capacità del condensatore.
- Determinare espressione e valore delle densità di carica di polarizzazione nei due dielettrici e le relative cariche di polarizzazione totali per ogni superficie e volume.
- Verificare la condizione di raccordo del campo elettrico all'interfaccia $r = b$.
- Del condensatore si sa che la rigidità dielettrica (massimo campo elettrico ammissibile prima che si bruci l'isolamento) è $E_{\text{MAX}} = 100$ kV/m. In quale dielettrico, e in quale punto, si raggiunge il massimo valore di campo? Per quale valore di carica, e quindi di differenza di potenziale, si ha in tale punto un campo pari a E_{MAX} ?

Per i punti a) e b) determinare anche i valori numerici delle quantità richieste. Per il punto c) determinare anche i valori numerici delle cariche di polarizzazione totali.

Esercizio 2. Un elettromagnete a C è realizzato avvolgendo un circuito di N spire su di un'anima ferromagnetica di sezione trasversale quadrata, con lato $d = 16$ cm. Il ferro ha una lunghezza media $L_c = 99$ cm a cui si aggiunge un traferro di lunghezza $L_t = 1$ cm. La curva di magnetizzazione caratteristica del materiale è approssimabile con la funzione $B = k \cdot \arctan(H/\alpha)$, con $k = 1.5$ T e $\alpha = 3000$ A/m. Si vuole avere un campo $B = 1$ T nel traferro. Si considerino grandezze medie sulla sezione e si trascuri il flusso disperso. Per indicare chiaramente direzioni e versi dei vettori si utilizzino disegni opportuni.



- Determinare \mathbf{H} (in modulo e verso) nel ferro e nel traferro.
- Calcolare il numero N di spire necessarie per ottenere il campo desiderato, data una corrente disponibile massima $I = 10$ A.
- Determinare \mathbf{M} (in modulo e verso) nell'anima ferromagnetica.
- Determinare la densità di corrente di magnetizzazione sulla superficie dell'anima, e calcolarne la sua corrente totale di magnetizzazione.
- Un fascio di protoni entra nel traferro perpendicolarmente al campo magnetico, nel punto centrale della sezione, e descrive una traiettoria che è un quarto di circonferenza (cfr. figura). Calcolare l'energia cinetica dei protoni ($e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C; $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ Kg).



Esercizio 3

In una regione dello spazio (siamo nel vuoto), nella quale non sono presenti correnti elettriche, è presente un campo elettromagnetico con le seguenti caratteristiche: 1) Il potenziale vettore è dato da $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = A_0 \sin(kz - \omega t) \hat{\mathbf{e}}_x$; A_0 e ω sono due costanti note, dati del problema. 2) Il campo elettrico è dato da $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{\mathbf{e}}_x$ con E_0 e k costanti da determinare.

- Determinare l'espressione del campo di induzione magnetica $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ (modulo, direzione e verso).
- Determinare la densità della carica elettrica $\rho(\mathbf{r})$.
- Determinare le costanti E_0 e k . I campi $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ determinati sono un'onda elettromagnetica? Motivare adeguatamente la risposta.
- Determinare il gradiente del potenziale scalare ($\nabla \phi$). Commentare il risultato.

N.B.: i risultati devono essere espressi in funzione dei dati del problema.

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$