Esame scritto del Corso di Elettromagnetismo del 16 febbraio 2022
Prof. G. Colò, F. Ragusa – anno accademico 2020-2021

Attenzione: indicare nome, cognome e matricola su tutte le pagine. Numerare le pagine. Lo svolgimento dell'elaborato deve essere commentato e le leggi ed eventuali principi di simmetria utilizzati devono essere chiaramente enunciati. L'elaborato deve essere svolto ordinatamente e con una grafia comprensibile. Attenzione: i calcoli che portano ai singoli risultati devono essere riportati con chiarezza. Non seguire queste indicazioni può comportare un giudizio negativo, al limite insufficiente, dell'elaborato.

Esercizio 1. Una distribuzione di carica volumetrica è contenuta entro una sfera di raggio R, e ha la seguente forma analitica:

$$\rho(r) = \frac{3q}{\pi R^3}\left(1 - \frac{5}{4R^2} r^2\right)$$

dove r è la coordinata radiale che varia tra 0 e R. Si consideri $R = 5$ cm e $q = 1.25\ 10^{-12}$ C.

a) Si trovi la carica totale contenuta nella sfera.
b) Si trovi il campo elettrico **E** associato a questa distribuzione di carica, specificando la dipendenza dalla posizione (dentro e fuori dalla sfera), la direzione ed il verso. Calcolare la divergenza del campo elettrico e commentare il risultato.
c) Si trovi la posizione in cui il campo elettrico assume valore massimo, e si scriva il valore massimo del campo. Si disegni un grafico accurato dell'andamento del modulo del campo. Ci sono discontinuità nel campo elettrico? Motivare la risposta.
d) Si determini il potenziale elettrostatico V.
e) Si supponga ora che un protone (massa $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ Kg, $q_p = 1.60 \cdot 10^{-19}$ C) venga posto nel punto $r = R$, con velocità nulla. Se lasciato libero, in che direzione si muove il protone? Dopo un tempo sufficientemente grande, qual è la sua velocità? Esprimere la velocità come frazione della velocità della luce.

Esercizio 2. Un condensatore cilindrico, di lunghezza $L = 10$ cm, si scarica a causa del fatto che tra le sue armature si trova un dielettrico imperfetto, di costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 4$ e di conducibilità $\sigma = 10^{-6}$ ohm$^{-1}\cdot$m^{-1}. Le armature hanno raggi rispettivamente $R_1 = 10$ mm e $R_2 = 11$ mm ($R_2 - R_1 \ll L$). All'istante iniziale $t = 0$ la carica sulle armature è Q_0 (l'armatura esterna è carica positivamente mentre quella interna è carica negativamente).

a) Determinare, in funzione di t e della posizione i campi **E**, **D** nel dielettrico, nonché il potenziale V.
b) Calcolare i valori numerici della resistenza e della capacità del condensatore. Dopo quanto tempo la carica sulle armature raggiunge il valore pari a 1/10 del valore iniziale?
c) Determinare, in funzione di t e della posizione la densità di corrente di spostamento $\mathbf{J}_D$ e della corrente di spostamento. Confrontarla con la corrente di conduzione.
d) Determinare l'eventuale campo di induzione magnetica **B** presente fra le armature. Motivare la risposta.

Esercizio 3. Il campo elettrico di un'onda monocromatica piana nel vuoto è

$$\mathbf{E}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 (\cos(kx - \omega t)\,\hat{\mathbf{e}}_y + \sin(kx - \omega t)\,\hat{\mathbf{e}}_z)$$

a) Determinare il campo **B** associato all'onda, giustificando matematicamente il risultato.
b) Determinare la polarizzazione dell'onda.
c) Determinare l'espressione vettoriale del vettore di Poynting. Se il valore di E_0 è 0.3 V/m, calcolare l'intensità dell'onda elettromagnetica.
d) Assumendo che l'onda incida normalmente alla superficie determinare la pressione che viene esercitata su una superficie completamente riflettente.

Explicit Forms of Vector Operations

Let $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ be orthogonal unit vectors associated with the coordinate directions specified in the headings on the left, and A_1, A_2, A_3 be the corresponding components of $\mathbf{A}$. Then

Cartesian
$(x_1, x_2, x_3 = x, y, z)$

$$\nabla\psi = \mathbf{e}_1 \frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial\psi}{\partial x_3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{e}_1\left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right) + \mathbf{e}_2\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right) + \mathbf{e}_3\left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)$$

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2}$$

Cylindrical
(ρ, ϕ, z)

$$\nabla\psi = \mathbf{e}_1 \frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \mathbf{e}_2 \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial\psi}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_1) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_2}{\partial\phi} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{e}_1\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_3}{\partial\phi} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + \mathbf{e}_2\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial\rho}\right) + \mathbf{e}_3 \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_2) - \frac{\partial A_1}{\partial\phi}\right)$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

Spherical
(r, θ, ϕ)

$$\nabla\psi = \mathbf{e}_1 \frac{\partial\psi}{\partial r} + \mathbf{e}_2 \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \mathbf{e}_3 \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_1) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_2) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_3}{\partial\phi}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{e}_1 \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_3) - \frac{\partial A_2}{\partial\phi}\right] + \mathbf{e}_2\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_1}{\partial\phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_3)\right] + \mathbf{e}_3 \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_2) - \frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right]$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$

$$\left[\text{Note that } \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi).\right]$$