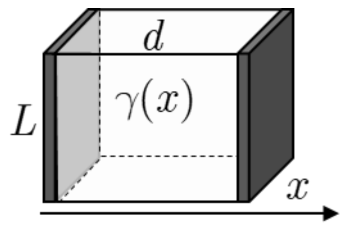
Esame scritto del Corso di Elettromagnetismo del 30 gennaio 2023
Prof. G. Colò, F. Ragusa – anno accademico 2021-2022

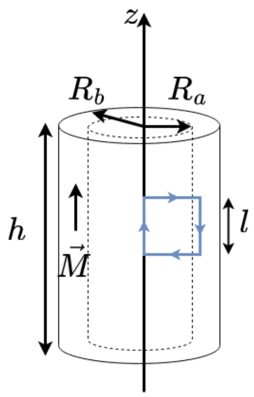
Attenzione: indicare **nome, cognome** e **matricola** su tutte le pagine. **Numerare le pagine**. Lo svolgimento dell'elaborato deve essere **commentato** e le **leggi** ed eventuali **principi di simmetria** utilizzati devono essere **chiaramente enunciati**. L'elaborato deve essere svolto **ordinatamente** e con una grafia **comprensibile**. Non seguire queste indicazioni può comportare un **giudizio negativo, al limite insufficiente**, dell'elaborato.



Esercizio 1. Si consideri un parallelepipedo di materiale dielettrico lineare con le basi quadrate di lato L = 5 cm, spessore d = 10 cm e costante dielettrica ε_r = 2. Il materiale è inoltre debolmente conduttore, ohmico, caratterizzato da una conduttività γ che varia in modo inversamente proporzionale alla distanza da una delle facce quadrate, considerata lungo l'asse x perpendicolare alla stessa, ovvero varia con la legge $\gamma(x) = \gamma_0\, x_0 / x$ dove $\gamma_0 = 2\ (\Omega\cdot\mathrm{m})^{-1}$ e x_0 = 0.01 m sono costanti. Alle due facce sono collegate due armature di conduttore ideale. Tra le armature del sistema circola una densità di corrente stazionaria nota $\mathbf{J} = J_0\, \hat{\mathbf{e}}_x$, $J_0 = 40\ \mathrm{A\cdot m^{-2}}$ Calcolare:

a) la densità volumica di carica libera nel mezzo conduttore e le densità superficiali di carica libera sui due elettrodi;
b) Le densità di carica di polarizzazione (volumiche e superficiali) e le rispettive cariche totali;
c) la differenza di potenziale tra le armature del sistema, l'intensità di corrente e la resistenza del sistema;
d) l'energia elettrostatica del sistema.

Per il punto c) calcolare anche i valori numerici



Esercizio 2. Una guaina cilindrica di materiale magnetico, di lunghezza h molto maggiore del raggio interno R_a e raggio esterno R_b in modo da poter considerare il cilindro di altezza infinita. La guaina è magnetizzata lungo la direzione del suo asse con $\mathbf{M} = M_0\, r/R_b \hat{\mathbf{e}}_z$ (assumendo coordinate cilindriche).
Determinare:

a) le densità di corrente di magnetizzazione e le correnti totali associate;
b) il campo **B** nelle tre regioni dello spazio ($r < R_a$, $R_a \le r < R_b$, $r \ge R_b$), usando la forma differenziale dell'equazione di Maxwell corrispondente al rotore di **B**, le simmetrie del problema, e utilizzando le opportune condizioni di raccordo. Determinare inoltre il campo **H** in tutti i punti dello spazio. In entrambi i casi, specificare modulo, direzione e verso;
c) la circuitazione del campo **B** per il circuito quadrato di lato l mostrato in figura e confrontarla con la corrente concatenata;
d) verificare le condizioni di continuità/discontinuità dei campi **B** e **H** sulle superfici laterali della guaina.

Esercizio 3. Un'onda elettromagnetica piana di frequenza ν = 3 GHz propaga in un mezzo caratterizzato da ε_r = 4 e μ_r = 1 ed è descritta dal potenziale vettore:

$$\mathbf{A}(y,t) = A_0 \sin(\,ky+\omega t\,)\, \hat{\mathbf{e}}_z \quad \text{con } A_0 = 2.5\times10^{-9}\ \mathrm{Tm}.$$

Determinare:

a) la velocità dell'onda, la pulsazione ω e il modulo del vettore d'onda k;
b) le espressioni delle componenti **E** e **B** dell'onda e la loro ampiezza;
c) la densità di energia elettromagnetica, il vettore di Poynting e l'intensità media dell'onda;
d) la f.e.m. indotta in una spira quadrata che giace nel piano y–z, con un vertice nell'origine, di lato 3/2 λ, dove λ è la lunghezza d'onda dell'onda nel mezzo, in funzione del tempo, ed il suo valore massimo.

NB: tutti i risultati vanno espressi in funzione dei dati del problema (A_0, ν) e delle costanti fondamentali. Per il punto a) e il valore massimo del punto d) calcolare anche i valori numerici.

$$\nabla\times\mathbf{V} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial\phi} - \frac{\partial V_\phi}{\partial z}\right]\hat{\mathbf{e}}_r + \left[\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right]\hat{\mathbf{e}}_\phi + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rV_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial\phi}\right]\hat{\mathbf{e}}_z$$