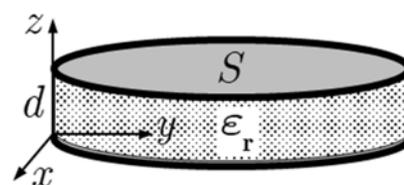


## Esame scritto del Corso di Elettromagnetismo del 13 luglio 2023

Prof. G. Colò, F. Ragusa – anno accademico 2022-2023

Attenzione: indicare **nome, cognome** e **matricola** su tutte le pagine. **Numerare le pagine**. Lo svolgimento dell'elaborato deve essere **commentato** e le **leggi** ed eventuali **principi di simmetria** utilizzati devono essere **chiaramente enunciati**. L'elaborato deve essere svolto **ordinatamente** e con una grafia **comprensibile**. Non seguire queste indicazioni può comportare un **giudizio negativo, al limite insufficiente**, dell'elaborato.

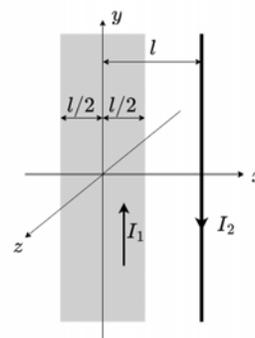
**Esercizio 1.** Un condensatore piano ha le armature circolari di superficie  $S$ , l'una posta a  $z = 0$  e l'altra ad altezza  $z = h$  ( $z$  è un asse verticale, perpendicolare alle armature). La distanza  $h$  è molto minore delle dimensioni delle armature e pertanto si possono trascurare gli effetti di bordo. Sulle armature sono poste delle cariche, e precisamente una carica  $-Q$  a  $z = 0$  e una opposta,  $+Q$ , a  $z = h$ . Si supponga che il condensatore non sia collegato ad alcun generatore. Viene inserito all'interno un cilindro dielettrico, che lo occupa tutto, con costante dielettrica variabile lungo  $z$ ,  $\epsilon_r = 1 + \alpha z$ , dove  $\alpha$  è una costante con dimensioni  $[\alpha] = L^{-1}$ .



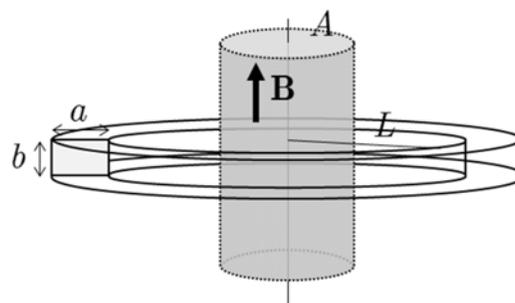
- Si scrivano i campi  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{P}$  all'interno del dielettrico (modulo, direzione e verso).
- Si calcolino i valori delle densità di carica di polarizzazione, e si mostri che la carica di polarizzazione totale è nulla.
- Si calcoli la differenza di potenziale ai capi del condensatore e l'energia elettrostatica immagazzinata  $U$ .
- Qual è il valore limite  $U_0$  dell'energia immagazzinata per  $\alpha \rightarrow 0$ ? Si scriva l'espressione del rapporto  $U/U_0$  in funzione del parametro  $\alpha$ . Dire se quest'ultimo risultato giustifica o meno il fatto che serva lavoro dall'esterno per estrarre il dielettrico?

**Esercizio 2.** In figura si mostra un nastro metallico di spessore  $\Delta z$  trascurabile, molto esteso nella direzione  $y$ , e largo  $l = 10$  cm. Esso è percorso da una corrente  $I_1 = 5$  A.

- Determinare l'espressione della densità di corrente di conduzione superficiale del nastro e calcolarne il valore numerico.
- Si scriva il campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$  in tutti i punti del piano  $x$ - $y$  all'esterno del nastro, specificandone il modulo, la direzione e il verso.
- Successivamente, nella posizione  $x = l$  viene posto un filo molto lungo, parallelo al nastro, percorso da una corrente  $I_2 = -I_1$ . Si calcoli ora il nuovo campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}'$  (modulo, direzione e verso) nei punti compresi tra nastro e filo.
- Trovare la posizione degli estremi di  $\mathbf{B}'$  nella regione  $l/2 < x < l$  (notare che gli estremi non sono inclusi); si calcoli inoltre il valore numerico del suo modulo in tali punti. Si suggerisce l'uso della variabile adimensionale  $u = x/l$ .



**Esercizio 3.** In una regione di spazio cilindrica molto lunga, di sezione  $A = 1$  m<sup>2</sup>, è presente un campo  $\mathbf{B}$  uniforme che viene fatto variare, in funzione del tempo, secondo la legge  $B = B_0 + B_1 \times (t/\tau)$ , con  $B_1 = 1$  T, e  $\tau = 10$  s. Concatenato con la regione di campo magnetico, coassiale ed esterno ad essa, vi è un conduttore toroidale a sezione rettangolare. La sua superficie interna ha raggio  $L = 2$  m, e la sezione ha dimensioni orizzontale e verticale pari ad  $a = 0.2$  m e  $b = 0.1$  m. La sua conducibilità è  $\sigma = 6.28 \times 10^6$  ( $\Omega \cdot \text{m}$ )<sup>-1</sup>.



- Si determini la forza elettromotrice  $\mathcal{E}$  indotta nel toroide e l'espressione del campo elettrico indotto  $\mathbf{E}$  nel toroide (modulo, direzione e verso).
- Si scriva l'espressione della densità di corrente di conduzione. Si calcoli l'espressione della corrente totale che circola nel toroide. Si determini la resistenza del toroide.
- Si determini l'espressione della densità di potenza dissipata nel toroide. Si calcoli l'espressione analitica della potenza dissipata integrando sul volume l'espressione della densità di potenza e lo si confronti con il valore della potenza dissipata nella resistenza utilizzando i risultati del punto b). Si calcoli infine il valore numerico della potenza totale dissipata. Si dica anche quanta energia viene dissipata in un tempo totale pari a  $\tau$ .