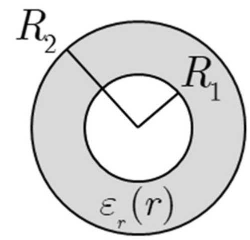
Prova scritta del corso di Elettromagnetismo
(Prof. F. Ragusa, Prof. G. Colò)
A.A. 2022-2023 - appello del 22/02/2024

Attenzione: indicare **nome, cognome** e **matricola** su tutte le pagine. **Numerare le pagine**. Lo svolgimento dell'elaborato deve essere **commentato** e le **leggi** ed eventuali **principi di simmetria** utilizzati devono essere **chiaramente enunciati**. L'elaborato deve essere svolto **ordinatamente** e con una grafia **comprensibile**. Non seguire queste indicazioni può comportare un **giudizio negativo, al limite insufficiente**, dell'elaborato.

Esercizio 1. Un condensatore sferico con armature sottili di raggio R_1 = 10 mm e R_2 = 20 mm è caricato con una carica $Q = 10^{-9}$ C in modo da avere l'armatura interna positiva, e quindi scollegato dal generatore. Fin dall'inizio il condensatore è riempito da un dielettrico lineare e isotropo, ma non omogeneo, con $\varepsilon_r(r) = \gamma r$ con $\gamma = 200\ \text{m}^{-1}$. Terminata la fase di carica, viene richiesto di:

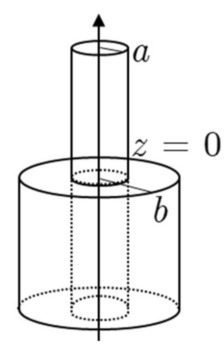


a) Determinare l'espressione vettoriale dei campi **D** ed **E** nell'intercapedine fra le armature del condensatore.
b) Determinare l'espressione e calcolare il valore della differenza di potenziale V_0 tra le armature e della capacità C e calcolarne i valori numerici.
c) Determinare l'espressione del vettore polarizzazione **P** nel condensatore. Determinare le espressioni delle densità di carica di polarizzazione sulle superfici e nel volume del dielettrico. Determinare le espressioni e i valori numerici delle rispettive cariche di polarizzazione.

Il condensatore viene quindi scaricato mettendo in contatto le armature tramite una resistenza R = 470 Ω. Trascurando i dettagli del circuito di collegamento, considerato ininfluente sui campi, viene richiesto di:

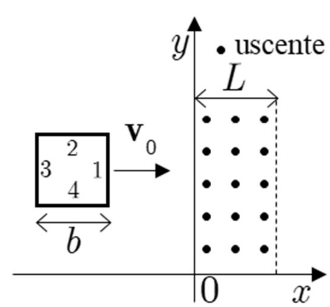
d) Determinare la legge temporale per la carica $Q(t)$ sul condensatore e la corrente $I(t)$. Si consideri $t = 0$ l'istante di chiusura del circuito.
e) Determinare l'espressione vettoriale della densità della corrente di spostamento $\mathbf{J}_s(t)$ e quella della corrente totale di spostamento I_s(t) tra le armature. Calcolare $I_s(t = 0)$. Commentare il risultato ottenuto.

Esercizio 2. Un filo conduttore di rame (considerabile magneticamente trasparente, $\mu = \mu_0$) ha la forma di un cilindro indefinitamente esteso, di raggio a = 5 mm. Esso è percorso da una corrente stazionaria I = 10 A, uniformemente distribuita sulla sezione del conduttore. Attorno al cilindro vi è una guaina di materiale ferromagnetico dolce (lineare) con permeabilità magnetica μ_r = 1000. La guaina ha raggio interno a e raggio esterno b = 30 mm, ma si estende solo per metà lunghezza, nel semispazio $z < 0$.



a) Determinare l'espressione dei campi **H**, **B**, **M** in tutto lo spazio.
b) Determinare espressione e valore delle densità di corrente di magnetizzazione.
c) Determinare espressione e valore delle correnti totali di magnetizzazione, nel volume e su tutte le superfici di interesse. Commentare il risultato.
d) Discutere le condizioni per i campi sulle interfacce.

Esercizio 3. Una spira quadrata, di lato b, di resistenza R, massa m e autoinduttanza trascurabile, si muove inizialmente con velocità v_0 su un piano senza attrito; al tempo $t = 0$ il lato 1 si trova nella posizione $x(0) = 0$. Nel piano si passa dalla regione iniziale in cui non è presente campo magnetico ad una regione in cui è presente un campo di induzione magnetica **B**, perpendicolare al piano e con verso uscente. La regione si estende per una lunghezza L. Trascurare forze di attrito e forza di gravità.



a) Descrivere qualitativamente il moto della spira. Determinare l'espressione della forza elettromotrice. Determinare l'espressione della corrente che circola nella spira.
b) Determinare l'espressione delle forze che agiscono sulla spira e scrivere la sua equazione del moto. Definire una costante di tempo τ che caratterizza il sistema.
c) Risolvere l'equazione del moto imponendo le opportune condizioni iniziali. Trovare la legge oraria della coordinata $x(t)$ del lato destro della spira. Enunciare le condizioni su v_0 perché la spira entri completamente nella regione L prima di arrestarsi e perché successivamente esca dalla regione L prima di arrestarsi (ovviamente nel caso la lunghezza L sia finita).

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 V_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta V_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}V_\phi$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right]\hat{\mathbf{e}}_r + \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right]\hat{\mathbf{e}}_\phi + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r v_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial\phi}\right]\hat{\mathbf{e}}_z$$