

Prova scritta del corso di Elettromagnetismo
(Prof. A. Mennella, Prof. G. Colò)
A.A. 2023-2024, 21/01/2025

Attenzione: indicare nome, cognome e matricola su tutte le pagine. Numerare le pagine. Lo svolgimento dell'elaborato deve essere commentato, le leggi ed eventuali principi di simmetria utilizzati devono essere chiaramente enunciati. Il compito deve essere svolto ordinatamente e con una grafia chiaramente leggibile. Non seguire queste indicazioni può comportare un giudizio negativo, al limite insufficiente, dell'elaborato.

Esercizio 1. Un condensatore, trattabile come ideale, è formato da due armature piane e parallele di superficie $S = 100 \text{ cm}^2$ a distanza $L = 1.5 \text{ cm}$. L'intercapedine è completamente riempita da un dielettrico lineare e isotropo ma non omogeneo, cioè con permittività dielettrica relativa κ variabile linearmente nella direzione x ortogonale alle armature secondo la legge $\kappa(x) = \alpha x/L + 1$, dove $\alpha = 2$. Il condensatore è mantenuto a una differenza di potenziale $V(x=0) - V(x=L) = 2 \text{ kV}$.

- a) Determinare l'espressione vettoriale dei campi \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{P} entro il condensatore.
- b) Determinare le espressioni delle distribuzioni di carica di polarizzazione. Laddove possibile, calcolarne il valore. Determinare espressioni e valori numerici delle cariche totali di polarizzazione.
- c) Determinare espressione e valore della capacità del condensatore senza e con il dielettrico.

Esercizio 2. Su di una sfera di raggio R si trova una distribuzione di carica superficiale uniforme σ .

- a) Determinare la carica totale Q , il campo elettrico per $r < R$ e $r > R$, e la pressione elettrostatica sulla superficie della sfera.
- b) Supporre ora di mettere la sfera in rotazione attorno ad un asse, con velocità angolare ω . Determinare le espressioni della velocità tangenziale \mathbf{v} in un punto della superficie, della corrente in una striscia di spessore infinitesimo sulla superficie, e del vettore \mathbf{J}_s (densità di corrente superficiale libera).
- c) Determinare il momento di dipolo magnetico totale della sfera carica in rotazione.
- d) Mostrare che il momento di dipolo magnetico totale è analogo a quello di una sfera piena uniformemente magnetizzata, caratterizzata da un vettore magnetizzazione \mathbf{M} . Quanto vale \mathbf{M} ? Come sono le corrispondenti densità di corrente di magnetizzazione? Si confronti \mathbf{J}_{ms} con \mathbf{J}_s trovata al punto b).

Esercizio 3. Un solenoide rettilineo molto lungo (idealmente infinito) è formato da un avvolgimento con una densità lineare di spire $n = 10^3 \text{ m}^{-1}$ su di un'anima di materiale ferromagnetico con $\mu_r = 600$ costante e di raggio $R = 5 \text{ cm}$. Esso viene acceso con una rampa lineare di corrente $I(t) = a \cdot t$, dove $a = 0.5 \text{ A/s}$.

- a) Determinare l'espressione vettoriale dei campi \mathbf{H} , \mathbf{B} , \mathbf{M} entro il solenoide. Calcolarne i valori a $t = 4 \text{ s}$.
- b) Determinare l'espressione vettoriale del campo elettrico in tutto lo spazio.
- c) Considerando una porzione del solenoide di lunghezza $h = 50 \text{ cm}$, determinare l'espressione della potenza elettromagnetica accumulata in tale regione di spazio al generico tempo t e calcolarne il valore a $t = 4 \text{ s}$.
- d) Determinare espressione e valore dell'induttanza L della suddetta porzione di solenoide.
- e) A partire da L scrivere l'espressione dell'energia magnetica. Scrivere anche la sua variazione temporale e confrontarla con la potenza calcolata al punto c), commentando la conservazione dell'energia per unità di tempo nel sistema.

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$$