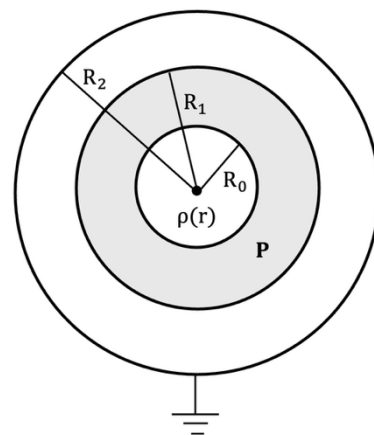


Prova scritta del corso di Elettromagnetismo
(Prof. A. Mennella, Prof. G. Colò)
A.A. 2024-2025, 21/01/2026

Attenzione: indicare nome, cognome e matricola su tutte le pagine. Numerare le pagine. Lo svolgimento dell'elaborato deve essere commentato, le leggi ed eventuali principi di simmetria utilizzati devono essere chiaramente enunciati. Il compito deve essere svolto ordinatamente e con una grafia chiaramente leggibile. Non seguire queste indicazioni può comportare un giudizio negativo, al limite insufficiente, dell'elaborato.

Esercizio 1. Una cavità sferica di raggio $R_1 = 4$ cm è riempita fino a $R_0 = 2$ cm di una densità di carica libera volumetrica $\rho(r) = k/r$ con $k = 1 \mu\text{C}/\text{m}^2$ ed è circondata da un guscio conduttore scarico di raggio interno R_1 e raggio esterno $R_2 = 2R_1$, oltre il quale vi è di nuovo il vuoto. Il sistema è inizialmente isolato mentre in un secondo momento lo strato più esterno del guscio conduttore viene collegato a terra.



- Determinare espressione e valore della carica totale Q_0 contenuta nella regione $r < R_0$, verificando che sia finita. Determinare espressione e valore delle densità di carica presenti sul guscio conduttore, nonché l'espressione del campo elettrico \mathbf{E} in tutto lo spazio prima del collegamento a terra.
- Determinare espressione e valore delle densità di carica presenti sul guscio conduttore e l'espressione del campo elettrico \mathbf{E} in tutto lo spazio dopo il collegamento a terra.

Successivamente lo spazio vuoto tra R_0 e R_1 viene riempito di un materiale dielettrico "rigido" con una polarizzazione permanente pari a $\mathbf{P} = P_0 \hat{\mathbf{e}}_r$ con $P_0 = 2 \mu\text{C}/\text{m}^2$.

- Determinare l'espressione delle densità di cariche di polarizzazione superficiali e volumetriche σ_p e ρ_p e delle rispettive cariche totali di polarizzazione. Di queste ultime calcolare anche i valori numerici.
- Determinare l'espressione dei campi \mathbf{D} e \mathbf{E} nel dielettrico. Verificare le condizioni di continuità/discontinuità per \mathbf{D} sulle superfici di raggio R_0, R_1 .

Esercizio 2. Un conduttore è costituito da uno guscio cilindrico nel vuoto di raggio interno $a = 4$ cm, spessore $d = 1$ mm, orientato lungo l'asse z , di altezza $h = 20$ cm e resistività $\rho = 10^{-7} \Omega\text{m}$. Si supponga ora che tale conduttore sia posto in un campo magnetico $\mathbf{B} = B_0 \sin(\omega t)$, anche esso lungo z e caratterizzato da $B_0 = 0.5$ T e $\omega = 2\pi \cdot 50$ rad/s, che permea tutto lo spazio.

- Determinare l'espressione vettoriale del campo elettrico e della densità di corrente indotti nel conduttore, e l'espressione della corrente totale $I(t)$.
- Confrontare il risultato esatto per la corrente I con l'approssimazione in cui d è trascurabile rispetto ad a , e quindi la densità di corrente nel conduttore si può considerare uniforme ($\mathbf{J}(r) = \mathbf{J}(a) \forall r \in (a, a+d)$). È una buona approssimazione? In caso affermativo, si usi tale approssimazione nei punti che seguono.
- Determinare l'espressione della potenza istantanea dissipata all'interno del conduttore e si calcoli il suo valor medio sul periodo.
- Considerando un'approssimazione di lunghezza infinita, determinare l'espressione vettoriale del campo \mathbf{B}_1 generato dalla corrente indotta in tutto lo spazio. Considerando il campo di induzione magnetica totale, calcolare il valore numerico del rapporto tra campo interno ed esterno al cilindro per $t = \pi/4\omega$.

Esercizio 3. Un'onda elettromagnetica piana, di frequenza $\nu = 1$ MHz, polarizzata linearmente lungo l'asse y , si propaga nella direzione dell'asse z in un mezzo materiale avente $\epsilon_r = 8.4$ e $\mu_r = 1.07$.

- Determinare espressioni e valori di pulsazione, lunghezza d'onda, vettore d'onda e velocità del segnale.
- Sapendo che a $z = 0, t = 0$ i campi sono nulli e che a $z = 38$ m, $t = 1.7 \mu\text{s}$ il campo elettrico vale 1 V/m, scrivere le espressioni vettoriali di $\mathbf{E}(z,t)$ e $\mathbf{B}(z,t)$ e determinare le ampiezze dei campi E_0 e B_0 .
- Determinare il vettore di Poynting, nonché espressione e valore dell'intensità media dell'onda.
- Determinare espressione e valore della densità di energia elettromagnetica media trasportata dall'onda.