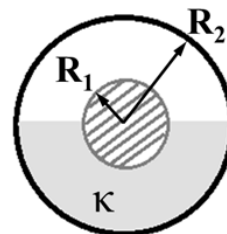


Prova scritta del corso di Elettromagnetismo
(Prof. A. Mennella, Prof. G. Colò)
A.A. 2025-2026, 25/06/2026

Attenzione: indicare nome, cognome e matricola su tutte le pagine. Numerare le pagine. Lo svolgimento dell'elaborato deve essere commentato, le leggi ed eventuali principi di simmetria utilizzati devono essere chiaramente enunciati. Il compito deve essere svolto ordinatamente e con una grafia chiaramente leggibile. Non seguire queste indicazioni può comportare un giudizio negativo, al limite insufficiente, dell'elaborato.

Esercizio 1. Un condensatore è formato da un cilindro di raggio $R_1 = 2$ mm coassiale con un guscio sottile di raggio $R_2 = 3$ mm, entrambi di lunghezza $L = 20$ mm (considerare $L \gg R_1, R_2$). L'intercapedine è inizialmente in vuoto e il condensatore è stato caricato con $Q = 100$ pC, con la carica positiva sull'armatura interna.



- Determinare l'espressione vettoriale del campo elettrico tra le armature. Determinare espressione e valore della differenza di potenziale $\Delta V = V_1 - V_2$ tra le armature, e della capacità C .
- Considerare che il condensatore sia totalmente riempito di paraffina, ovvero un dielettrico lineare, omogeneo e isotropo di costante dielettrica relativa $\kappa = 2.2$. Calcolarne la capacità.
- Ora supporre (vedasi figura) che la paraffina riempia solo metà del condensatore. Considerando la geometria, determinare espressione e valore della nuova capacità. Considerando la carica libera depositata Q costante, determinare espressione e valore della nuova ΔV e delle cariche libere sulle due metà delle armature.
- Ragionando esplicitamente sulle condizioni al contorno e all'interfaccia vuoto/dielettrico, determinare l'espressione vettoriale del campo elettrico nella nuova configurazione.
- Determinare l'espressione vettoriale della polarizzazione $\mathbf{P}$. Determinare espressione e valore delle densità di carica di polarizzazione e delle rispettive cariche totali di polarizzazione su ogni varietà.

Esercizio 2. Un guscio cilindrico di altezza $L = 15$ cm, raggio interno $R_1 = 1$ cm e raggio esterno $R_2 = 2$ cm (dunque $L \gg R_1, R_2$) ha una magnetizzazione $\mathbf{M} = M_0 r \hat{\mathbf{e}}_z$, con $M_0 = 10^7$ A/m².

- Determinare l'espressione vettoriale delle densità di corrente di magnetizzazione di superficie (su tutte le superfici interessate) e di volume.
- Determinare l'espressione e il valore delle correnti totali di superficie (su ogni superficie interessata) e di volume. Commentare la ragionevolezza del risultato.
- Sempre considerando il guscio di estensione longitudinale infinita, determinare l'espressione vettoriale dei campi $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{M}$ in tutto lo spazio. Calcolare il valore di $\mathbf{B}$ in $r = R_1^+$ e $r = R_2^-$.
- Considerando ora che L è effettivamente un valore finito, si può intuire che $\mathbf{H}$ e $\mathbf{B}$ sono presenti anche nelle regioni di vuoto. Disegnare qualitativamente le rispettive linee di campo in questo caso.

Esercizio 3. Un solenoide sottile, molto esteso in lunghezza, con n spire per unità di lunghezza e raggio R , è posto in vuoto e percorso da una corrente di andamento temporale $I = \alpha \cdot t$ nell'intervallo di tempo $0 < t < T$.

- Determinare l'espressione vettoriale dei campi $\mathbf{H}$ e $\mathbf{B}$ all'interno e all'esterno del solenoide.
- Determinare l'espressione vettoriale del campo $\mathbf{E}$ all'interno e all'esterno del solenoide, applicando la forma integrale della legge dell'induzione elettromagnetica.
- Mostrare che lo stesso risultato del punto b) si può trovare partendo dalla forma differenziale della legge, ovvero dall'equazione di Maxwell $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$, spiegando quali simmetrie possono essere utilizzate.
- Determinare l'espressione vettoriale del vettore di Poynting $\mathbf{S}$ per $r = R$. Determinare il flusso Φ di $\mathbf{S}$ attraverso una superficie cilindrica di raggio R e lunghezza unitaria. Determinare l'autoinduttanza per unità di lunghezza del solenoide e l'energia magnetica U nel volume racchiuso dalla suddetta superficie. Mostrare esplicitamente che vale $\Phi = -dU/dt$.

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rF_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{e}}_r + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) \hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \hat{\mathbf{e}}_z$$